２０２５ 入試対策
過去問ライブラリー

共通テスト

数学Ⅰ・数学A

２０１５ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策
共通テスト
数学Ⅰ・数学Ａ

まえがき

本書には，2021 年度から 2024 年度に実施された共通テスト(本試)，2015 年度から 2020 年度に実施されたセンター試験(本試)について，「数学Ⅰ・数学 A」の全問題と解答例を掲載しています。過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程に対応した内容分類を行っています。

なお，試作問題などを編集した電子書籍『共通プレテスト数学』は，Web サイト「電数図書館」から無料ダウンロードできますので，合わせてご活用ください。

注　「整数」は範囲外になるため除外しました。
解答用紙マーク欄は，⊜が廃止され ⊖と ⓪～⑨だけに変更されますが，この点については対応していません。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。

2　閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要です。

目　　次

数学Ⅰ　分野別問題と解答例 …… 3

数と式 …… 4

集合と命題 …… 14

図形と計量 …… 22

２次関数 …… 40

データの分析 …… 59

三角比の表 …… 106

数学Ａ　分野別問題と解答例 …… 107

図形の性質 …… 108

確　率 …… 129

数学Ⅰ　分野別問題と解答例

数と式／集合と命題／図形と計量

２次関数／データの分析

問　題

不等式 $n<2\sqrt{13}<n+1$ ……①を満たす整数 n は $\boxed{\text{ア}}$ である。実数 a, b を，$a=2\sqrt{13}-\boxed{\text{ア}}$ ……②，$b=\dfrac{1}{a}$ ……③で定める。このとき

$$b=\frac{\boxed{\text{イ}}+2\sqrt{13}}{\boxed{\text{ウ}}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

である。また，$a^2-9b^2=\boxed{\text{エオカ}}\sqrt{13}$ である。

①から，$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{2}<\sqrt{13}<\dfrac{\boxed{\text{ア}}+1}{2}$ ……⑤が成り立つ。

太郎さんと花子さんは，$\sqrt{13}$ について話している。

太郎：⑤から $\sqrt{13}$ のおよその値がわかるけど，小数点以下はよくわからないね。
花子：小数点以下をもう少し詳しく調べることができないかな。

①と④から，$\dfrac{m}{\boxed{\text{ウ}}}<b<\dfrac{m+1}{\boxed{\text{ウ}}}$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{キク}}$ となる。よって，③から，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m+1}<a<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m}$ ……⑥が成り立つ。

$\sqrt{13}$ の整数部分は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，②と⑥を使えば $\sqrt{13}$ の小数第1位の数字は $\boxed{\text{コ}}$，小数第 2 位の数字は $\boxed{\text{サ}}$ であることがわかる。　[2024]

解答例

$n<2\sqrt{13}<n+1$ ……①を満たす整数 n は，$n^2<52<(n+1)^2$ から，$n=7$ である。

さて，$a=2\sqrt{13}-7$ ……②，$b=\dfrac{1}{a}$ ……③とおくと，

$$b=\frac{1}{2\sqrt{13}-7}=\frac{7+2\sqrt{13}}{(2\sqrt{13})^2-7^2}=\frac{7+2\sqrt{13}}{3}\ \cdots\cdots\cdots④$$

$$a^2-9b^2=(2\sqrt{13}-7)^2-9\cdot\frac{(7+2\sqrt{13})^2}{9}=-28\sqrt{13}\cdot 2=-56\sqrt{13}$$

①から $\dfrac{7}{2}<\sqrt{13}<\dfrac{8}{2}$ ……⑤，①④から $\dfrac{7+7}{3}<b<\dfrac{7+8}{3}$ となり，$\dfrac{14}{3}<b<\dfrac{15}{3}$

これより，$\dfrac{m}{3}<b<\dfrac{m+1}{3}$ を満たす整数 m は $m=14$ である。

よって，③から $\dfrac{14}{3}<\dfrac{1}{a}<\dfrac{15}{3}$ となり，$\dfrac{3}{15}<a<\dfrac{3}{14}$ ……⑥である。

したがって，⑤から $\sqrt{13}$ の整数部分は 3 であり，②⑥から，

$$\frac{3}{15}<2\sqrt{13}-7<\frac{3}{14},\ \frac{36}{5}<2\sqrt{13}<\frac{101}{14},\ \frac{18}{5}<\sqrt{13}<\frac{101}{28}$$

$\dfrac{18}{5}=3.6$，$3.60<\dfrac{101}{28}<3.61$ から，$\sqrt{13}$ の小数第 1 位の数字は 6，小数第 2 位の数字は 0 である。

コメント

数と式の基本的な問題です。流れに沿って，計算を進めることがポイントです。

問　題

実数 x についての不等式 $|x+6| \leqq 2$ の解は，$\boxed{\text{アイ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウエ}}$ である。

よって，実数 a，b，c，d が，$\left|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6\right| \leqq 2$ を満たしているとき，$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると，$(a-b)(c-d)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{カ}}\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$$

であることがわかる。

特に，$(a-b)(c-d)=\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$ ……①であるとき，さらに，$(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3}$ ……②が成り立つならば

$$(a-d)(c-b)=\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{3} \cdots\cdots\cdots ③$$

であることが，等式①，②，③の左辺を展開して比較することによりわかる。　[2023]

解答例

$|x+6| \leqq 2$ の解は，$-2 \leqq x+6 \leqq 2$ より，$-8 \leqq x \leqq -4$ ……(＊)

ここで，$\left|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6\right| \leqq 2$ のとき，(＊)から，

$$-8 \leqq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leqq -4$$

$1-\sqrt{3}<0$ なので，$-\dfrac{4}{1-\sqrt{3}} \leqq (a-b)(c-d) \leqq -\dfrac{8}{1-\sqrt{3}}$ となり，

$$\frac{4}{2}(1+\sqrt{3}) \leqq (a-b)(c-d) \leqq \frac{8}{2}(1+\sqrt{3})$$

$$2+2\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq 4+4\sqrt{3}$$

さて，$(a-b)(c-d)=4+4\sqrt{3}$ ……①，$(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3}$ ……②のとき，

①より $ac-ad-bc+bd=4+4\sqrt{3}$，②より $ab-ad-bc+cd=-3+\sqrt{3}$ となり，

$$(a-d)(c-b)=ac-ab-cd+bd=(4+4\sqrt{3})-(-3+3\sqrt{3})=7+3\sqrt{3}$$

コメント

不等式と式計算についての基本題です。

問　題

実数 a, b, c が，$a+b+c=1$ ……①および $a^2+b^2+c^2=13$ ……②を満たしているとする。

(1)　$(a+b+c)^2$ を展開した式において，①と②を用いると，$ab+bc+ca=$ $\boxed{\text{アイ}}$ であることがわかる。よって，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ の場合に，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めてみよう。

$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，$x+y=$ $\boxed{\text{オカ}}$ $\sqrt{5}$ である。また，(1)の計算から，$x^2+y^2=$ $\boxed{\text{キク}}$ が成り立つ。これらより $(a-b)(b-c)(c-a)=$ $\boxed{\text{ケ}}$ $\sqrt{5}$ である。

[2022]

解答例

条件より，$a+b+c=1$ ……①，$a^2+b^2+c^2=13$ ……②

(1)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ より，①②から，

$$1^2=13+2(ab+bc+ca),\quad ab+bc+ca=-6 \cdots\cdots\cdots ③$$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$ より，②③から，

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\cdot 13-2\cdot(-6)=38 \cdots\cdots\cdots ④$$

(2)　$a-b=2\sqrt{5}$ のとき，$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと，

$$x+y=b-a=-2\sqrt{5}$$

④より，$x^2+y^2=(b-c)^2+(c-a)^2=38-(a-b)^2=38-(2\sqrt{5})^2=18$

さらに，$xy=\dfrac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}=\dfrac{1}{2}\{(-2\sqrt{5})^2-18\}=1$ なので，

$$(a-b)(b-c)(c-a)=2\sqrt{5}xy=2\sqrt{5}$$

コメント

よく見かける数と式の基本題です。

問　題

c を正の整数とする。x の 2 次方程式 $2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$ ……①について考える。

(1)　$c=1$ のとき，①の左辺を因数分解すると，$\left(\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}\right)\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)$ であるから，①の解は $x=-\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　$c=2$ のとき，①の解は $x=\dfrac{-\boxed{\text{エ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であり，大きい方の解を α とすると，$\dfrac{5}{\alpha}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}+\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。また，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は $\boxed{\text{シ}}$ である。

(3)　太郎さんと花子さんは，①の解について考察している。

太郎：①の解は c の値によって，ともに有理数である場合もあれば，とも無理数である場合もあるね。c がどのような値のときに，解は有理数になるのかな。

花子：2 次方程式の解の公式の根号の中に着目すればいいんじゃないかな。

①の解が異なる 2 つの有理数であるような正の整数 c の個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個である。

[2021]

解答例

(1)　$2x^2+(4c-3)x+2c^2-c-11=0$ ……①について，$c=1$ のとき①の左辺は，

$$2x^2+x-10=(2x+5)(x-2)$$

これより，①の解は $x=-\dfrac{5}{2}$，2 である。

(2)　$c=2$ のとき①は $2x^2+5x-5=0$ となり，その解は $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{65}}{4}$ である。

ここで，$\alpha=\dfrac{-5+\sqrt{65}}{4}$ とすると，$\dfrac{5}{\alpha}=\dfrac{20}{-5+\sqrt{65}}=\dfrac{20(5+\sqrt{65})}{-25+65}=\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}$

$8<\sqrt{65}<9$ から $\dfrac{13}{2}<\dfrac{5+\sqrt{65}}{2}<7$ となるので，$m<\dfrac{5}{\alpha}<m+1$ を満たす整数 m は $m=6$ である。

(3)　正の整数 c に対し，①の解が異なる 2 つの有理数である条件は，判別式 D が正でしかも平方数であることより，

$$D=(4c-3)^2-8(2c^2-c-11)=-16c+97$$

まず，$D>0$ が必要なので，$0<c<\dfrac{97}{16}=6+\dfrac{1}{16}$ から，$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$c=1$ のとき $D=81=9^2$，$c=2$ のとき $D=65$，$c=3$ のとき $D=49=7^2$

$c=4$ のとき $D=33$，$c=5$ のとき $D=17$，$c=6$ のとき $D=1=1^2$

これより，条件に適するのは $c=1,\ 3,\ 6$ となり，その個数は 3 個である。

コメント

2 次方程式の解を題材にした基本問題です。

問　題

a を実数とする。

$9a^2-6a+1=(\boxed{\text{ア}}a-\boxed{\text{イ}})^2$ である。次に，$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと，$A=\sqrt{(\boxed{\text{ア}}a-\boxed{\text{イ}})^2}+|a+2|$ である。

次の 3 つの場合に分けて考える。

・$a>\frac{1}{3}$ のとき，$A=\boxed{\text{ウ}}a+\boxed{\text{エ}}$ である。

・$-2\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき，$A=\boxed{\text{オカ}}a+\boxed{\text{キ}}$ である。

・$a<-2$ のとき，$A=-\boxed{\text{ウ}}a-\boxed{\text{エ}}$ である。

$A=2a+13$ となる a の値は，$\boxed{\text{ク}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。　[2019]

解答例

$9a^2-6a+1=(3a-1)^2$ より，$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$ とおくと，

$$A=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|=|3a-1|+|a+2|$$

(i)　$a>\frac{1}{3}$ のとき　$A=(3a-1)+(a+2)=4a+1$

(ii)　$-2\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき　$A=-(3a-1)+(a+2)=-2a+3$

(iii)　$a<-2$ のとき　$A=-(3a-1)-(a+2)=-4a-1$

ここで，$A=2a+13$ となるのは，

(i)　$a>\frac{1}{3}$ のとき　$4a+1=2a+13$ から $a=6$ となり適する。

(ii)　$-2\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき　$-2a+3=2a+13$ から $a=-\frac{5}{2}$ となり適さない。

(iii)　$a<-2$ のとき　$-4a-1=2a+13$ から $a=-\frac{7}{3}$ となり適する。

以上より，$a=6$，$-\frac{7}{3}$ である。

コメント

絶対値の処理について，基本事項の確認問題です。計算は，質・量ともに軽めです。

問　題

x を実数とし，$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$ とおく。整数 n に対して

$$(x+n)(n+5-x)=x(5-x)+n^2+\boxed{\text{ア}}\,n$$

であり，したがって，$X=x(5-x)$ とおくと，

$$A=X(X+\boxed{\text{イ}})(X+\boxed{\text{ウエ}})$$

と表せる。

$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X=\boxed{\text{オ}}$ であり，$A=2^{\boxed{\text{カ}}}$ である。　[2018]

解答例

まず，$(x+n)(n+5-x)=nx+x(5-x)+n^2+n(5-x)=x(5-x)+n^2+5n$

ここで，$X=x(5-x)$ とおくと，$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$ に対し，

$$(x+1)(6-x)=X+1^2+5\cdot 1=X+6$$

$$(x+2)(7-x)=X+2^2+5\cdot 2=X+14$$

よって，$A=X(X+6)(X+14)$ と表せる。

また，$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\cdot\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}=\dfrac{25-17}{4}=2$ となり，

$$A=2(2+6)(2+14)=2\cdot 8\cdot 16=2^8$$

コメント

式の値を求める問題で，誘導に従うと計算も簡単です。

問　題

x は正の実数で，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$ を満たすとする。このとき，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である

から，$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。さらに

$$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-\boxed{\text{ウ}}\right)=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$$

である。また，$x^4+\dfrac{16}{x^4}=$ $\boxed{\text{キク}}$ である。　[2017]

解答例

$x>0$ で，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$ のとき，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{4}{x^2}+2x\cdot\dfrac{2}{x}=9+4=13$

これより，$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{13}$ となり，

$$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-x\cdot\frac{2}{x}\right)=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-2\right)=7\sqrt{13}$$

すると，$x^4+\dfrac{16}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{4}{x^2}=81-8=73$

コメント

数と式の基本題です。誘導の与えられている因数分解は数Ⅱですが。

問　題

a を実数とする。x の関数 $f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$ を考える。

$f(x)=\left(-\boxed{\text{ア}}\,a+\boxed{\text{イ}}\right)x+2a+1$ である。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，$a\leqq\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{ウ}}\,a+\boxed{\text{エ}}$ であり，$a>\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{オ}}\,a+\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において，つねに $f(x)\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は，

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\leqq a\leqq\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。　[2016]

解答例

$f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x=(-3a+1)x+2a+1$ に対して，

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

(i)　$-3a+1\geqq 0\left(a\leqq\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$f(0)=2a+1$

(ii)　$-3a+1<0\left(a>\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$f(1)=-a+2$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において，つねに $f(x)\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ となる条件は，(1)より，

(i)　$-3a+1\geqq 0\left(a\leqq\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$2a+1\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ より $4a\geqq 1$ となり，

$a\leqq\dfrac{1}{3}$ と合わせると，$\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$

(ii)　$-3a+1<0\left(a>\dfrac{1}{3}\right)$ のとき　$-a+2\geqq\dfrac{2(a+2)}{3}$ より $-5a\geqq -2$ となり，

$a>\dfrac{1}{3}$ と合わせると，$\dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{2}{5}$

(i)(ii)より，$\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq\dfrac{2}{5}$

コメント

1 次関数と 1 次不等式についての基本題です。

問　題

自然数 n に関する 3 つの条件 p, q, r を次のように定める。

p : n は 4 の倍数である　　q : n は 6 の倍数である

r : n は 24 の倍数である

条件 p, q, r の否定をそれぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$，$\overline{r}$ で表す。

条件 p を満たす自然数全体の集合を P とし，条件 q を満たす自然数全体の集合を Q とし，条件 r を満たす自然数全体の集合を R とする。自然数全体の集合を全体集合とし，集合 P, Q, R の補集合をそれぞれ $\overline{P}$，$\overline{Q}$，$\overline{R}$ で表す。

(1)　次の［ア］に当てはまるものを，下の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

$32 \in$［ア］である。

⓪　$P \cap Q \cap R$　　①　$P \cap Q \cap \overline{R}$　　②　$P \cap \overline{Q}$

③　$\overline{P} \cap Q$　　④　$\overline{P} \cap \overline{Q} \cap R$　　⑤　$\overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}$

(2)　次の［エ］に当てはまるものを，下の ⓪～④のうちから 1 つ選べ。

$P \cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは［イウ］である。

また，［イウ］［エ］R である。

⓪　$=$　　①　$\subset$　　②　$\supset$　　③　$\in$　　④　$\notin$

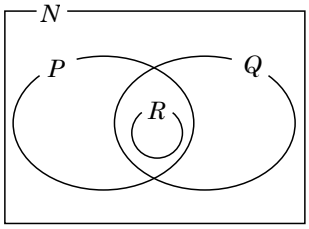
(3)　次の［オ］に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

自然数［イウ］は，命題［オ］の反例である。

⓪　「(p かつ q) $\Longrightarrow$ $\overline{r}$」　　①　「(p または q) $\Longrightarrow$ $\overline{r}$」

②　「r $\Longrightarrow$ (p かつ q)」　　③　「(p かつ q) $\Longrightarrow$ r」　　[2020]

解答例



自然数 n に関する 3 つの条件 p : n は 4 の倍数，q : n は 6 の倍数，r : n は 24 の倍数に対し，条件を満たす自然数全体の集合をそれぞれ P, Q, R とする。すると，4 の倍数かつ 6 の倍数は 12 の倍数であるので，$R \subset (P \cap Q)$ となる。 また，自然数全体の集合を N とおく。

(1)　32 は 4 の倍数であるが 6 の倍数でないので，$32 \in P \cap \overline{Q}$

(2)　$P \cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは 12 である。また，$12 \notin R$ である。

(3)　(2)より，自然数 12 は命題「(p かつ q) $\Longrightarrow$ r」の反例である。

コメント

集合と論証の基本題です。

問　題

2 つの自然数 m, n に関する 3 つの条件 p, q, r を次のように定める。

p : m と n はともに奇数である　　q : $3mn$ は奇数である

r : $m+5n$ は偶数である

また，条件 p の否定を $\overline{p}$ で表す。

(1)　次の［ア］，［イ］に当てはまるものを，下の ⓪～②のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

2 つの自然数 m, n が条件 $\overline{p}$ を満たすとする。このとき，m が奇数ならば n は［ア］。また，m が偶数ならば n は［イ］。

⓪　偶数である　　①　奇数である　　②　偶数でも奇数でもよい

(2)　次の［ウ］，［エ］，［オ］に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための［ウ］。　　p は r であるための［エ］。

$\overline{p}$ は r であるための［オ］。

⓪　必要十分条件である　　①　必要条件であるが十分条件ではない

②　十分条件であるが必要条件ではない　　③　必要条件でも十分条件でもない

[2019]

解答例

自然数 m, n に関する 3 つの条件 p, q, r について，

p : m と n はともに奇数　　q : $3mn$ は奇数 $\Leftrightarrow$ q : mn は奇数

r : $m+5n$ は偶数 $\Leftrightarrow$ r : $m+n$ は偶数

(1)　条件 $\overline{p}$ は「m，n の少なくとも一方は偶数」であるので，自然数 m，n が条件 $\overline{p}$ を満たすとき，「m が奇数ならば n は偶数」，「m が偶数ならば n は偶数でも奇数でもよい」となる。

(2)　「m と n はともに奇数」⇒「mn は奇数」は真，「mn は奇数」⇒「m と n はともに奇数」は真より，p は q であるための必要十分条件である。

「m と n はともに奇数」⇒「$m+n$ は偶数」は真，「$m+n$ は偶数」⇒「m と n はともに奇数」は偽より，p は r であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

「m，n の少なくとも一方は偶数」⇒「$m+n$ は偶数」は偽，「$m+n$ は偶数」⇒「m，n の少なくとも一方は偶数」は偽より，$\overline{p}$ は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

コメント

例年のように出題される命題について，基本事項の確認問題です。

問　題

(1)　全体集合 U を $U=\{x \mid x$ は 20 以下の自然数$\}$ とし，次の部分集合 A, B, C を考える。

$A=\{x \mid x \in U$ かつ x は 20 の約数$\}$

$B=\{x \mid x \in U$ かつ x は 3 の倍数$\}$

$C=\{x \mid x \in U$ かつ x は偶数$\}$

集合 A の補集合を $\overline{A}$ と表し，空集合を $\varnothing$ と表す。

次の［ア］に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

集合の関係

(a)　$A \subset C$　　(b)　$A \cap B=\varnothing$

の正誤の組合せとして正しいものは［ア］である。

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

次の［イ］に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

集合の関係

(c)　$(A \cup C) \cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$　　(d)　$(\overline{A} \cap C) \cup B=\overline{A} \cap (B \cup C)$

の正誤の組合せとして正しいものは［イ］である。

	⓪	①	②	③
(c)	正	正	誤	誤
(d)	正	誤	正	誤

(2)　実数 x に関する次の条件 p, q, r, s を考える。

$p:|x-2|>2$,　$q:x<0$,　$r:x>4$,　$s:\sqrt{x^2}>4$

次の［ウ］，［エ］に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちからそれぞれ 1 つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

q または r であることは，p であるための［ウ］。また，s は r であるための［エ］。

⓪　必要条件であるが，十分条件ではない

①　十分条件であるが，必要条件ではない

②　必要十分条件である

③　必要条件でも十分条件でもない　　[2018]

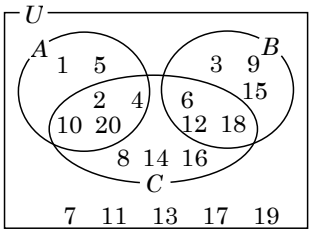
解答例

(1)　$U=\{x \mid x$ は 20 以下の自然数$\}$ に対して，

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$

$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$



すると，(a) $A \subset C$ は誤，(b) $A \cap B=\varnothing$ は正であり，また，(c) $(A \cup C) \cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$ は正，(d) $(\overline{A} \cap C) \cup B=\overline{A} \cap (B \cup C)$ は正である。

(2)　$p:|x-2|>2$，$q: x<0$，$r: x>4$，$s: \sqrt{x^2}>4$ に対して，

$p: x<0$ または $4<x$，$s: x<-4$ または $4<x$

これより，q または r であることは，p であるための必要十分条件である。

また，s は r であるための必要条件であるが，十分条件ではない。

コメント

(1)は解答例のように図を描いて処理をするのが確実でしょう。その際，$A \cap B=\varnothing$ がポイントになります。(2)は同値変形だけです。

問　題

実数 x に関する 2 つの条件 p, q を

$p : x = 1$　　$q : x^2 = 1$

とする。また，条件 p, q の否定をそれぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$ で表す。

(1)　次の［ア］，［イ］，［ウ］，［エ］に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

q は p であるための［ア］。　　$\overline{p}$ は q であるための［イ］。

(p または $\overline{q}$)は q であるための［ウ］。　　($\overline{p}$ かつ q)は q であるための［エ］。

⓪　必要条件だが十分条件でない　　①　十分条件だが必要条件でない

②　必要十分条件である　　③　必要条件でも十分条件でもない

(2)　実数 x に関する条件 r を，$r : x > 0$ とする。次の［オ］に当てはまるものを，下の ⓪～⑦のうちから 1 つ選べ。

3 つの命題

A :「(p かつ q) $\Longrightarrow r$」　　B :「$q \Longrightarrow r$」　　C :「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

の真偽について正しいものは［オ］である。

⓪　A は真，B は真，C は真　　①　A は真，B は真，C は偽

②　A は真，B は偽，C は真　　③　A は真，B は偽，C は偽

④　A は偽，B は真，C は真　　⑤　A は偽，B は真，C は偽

⑥　A は偽，B は偽，C は真　　⑦　A は偽，B は偽，C は偽　　[2017]

解答例

(1)　条件 $p : x = 1$，$q : x^2 = 1$ に対して，$\overline{p} : x \neq 1$ となり，

($\overline{p}$ かつ q) : $x = -1$　　(p または $\overline{q}$) : $x \neq -1$

「$x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$」は偽，「$x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$」は真なので，$q$ は p であるための必要条件だが十分条件でない。

「$x \neq 1 \Longrightarrow x^2 = 1$」は偽，「$x^2 = 1 \Longrightarrow x \neq 1$」は偽なので，$\overline{p}$ は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

「$x \neq -1 \Longrightarrow x^2 = 1$」は偽，「$x^2 = 1 \Longrightarrow x \neq -1$」は偽なので，($p$ または $\overline{q}$) は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

「$x = -1 \Longrightarrow x^2 = 1$」は真，「$x^2 = 1 \Longrightarrow x = -1$」は偽なので，($\overline{p}$ かつ q) は q であるための十分条件だが必要条件でない。

(2)　条件 $p : x=1$，$q : x^2=1$，$r : x>0$ に対して，$(p$ かつ $q) : x=1$

A :「$(p$ かつ $q) \Longrightarrow r$」すなわち「$x=1 \Longrightarrow x>0$」は真，B :「$q \Longrightarrow r$」すなわち「$x^2=1 \Longrightarrow x>0$」は偽，また「$p \Longrightarrow q$」は真なので，その対偶 C :「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は真である。

コメント

命題に関する基本事項の確認問題です。なお，(1)の選択肢の順序が，従来とは異なっています。

問　題

次の問いに答えよ。必要ならば，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1)　A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とする。空集合を $\varnothing$ と表す。

次の(i)～(iv)が真の命題になるように，$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$に当てはまるものを，下の ⓪～⑤のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i)　$A\ \boxed{\text{ア}}\ \{0\}$　　(ii)　$\sqrt{28}\ \boxed{\text{イ}}\ B$

(iii)　$A=\{0\}\ \boxed{\text{ウ}}\ A$　　(iv)　$\varnothing=A\ \boxed{\text{エ}}\ B$

⓪ $\in$　① $\ni$　② $\subset$　③ $\supset$　④ $\cap$　⑤ $\cup$

(2)　実数 x に対する条件 p, q, r を次のように定める。

$p: x$ は無理数　　$q: x+\sqrt{28}$ は有理数　　$r: \sqrt{28}x$ は有理数

次の$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

p は q であるための$\boxed{\text{オ}}$。p は r であるための$\boxed{\text{カ}}$。

⓪　必要十分条件である　　①　必要条件であるが十分条件ではない

②　十分条件であるが必要条件ではない　　③　必要条件でも十分条件でもない

[2016]

解答例

(1)　A を有理数全体の集合，B を無理数全体の集合とするとき，

(i)　0 は有理数より，$A\supset\{0\}$

(ii)　$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ は無理数より，$\sqrt{28}\in B$

(iii)　$\{0\}$ は A の部分集合より，$A=\{0\}\cup A$

(iv)　A と B の共通部分は空集合となり，$\varnothing=A\cap B$

(2)　条件 $p: x$ は無理数，$q: x+\sqrt{28}$ は有理数，$r: \sqrt{28}x$ は有理数 に対して，

$p\Rightarrow q$ は偽(反例 $x=\sqrt{7}$)，$p\Leftarrow q$ は真(有理数と無理数の差は無理数)より，p は q であるための必要条件であるが十分条件でない。

$p\Rightarrow r$ は偽(反例 $x=1+\sqrt{7}$)，$p\Leftarrow r$ も偽(反例 $x=0$)より，p は r であるための必要条件でも十分条件でもない。

コメント

(1)がヒントで(2)の反例 $x=0$ につながっているのでしょう。

問　題

条件 p_1，p_2，q_1，q_2 の否定をそれぞれ $\overline{p_1}$，$\overline{p_2}$，$\overline{q_1}$，$\overline{q_2}$ と書く。

(1)　次の［　ア　］に当てはまるものを，下の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。

命題「$(p_1$ かつ $p_2)$ $\Longrightarrow$ $(q_1$ かつ $q_2)$」の対偶は［　ア　］である。

⓪　$(\overline{p_1}$ または $\overline{p_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{q_1}$ または $\overline{q_2})$

①　$(\overline{q_1}$ または $\overline{q_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{p_1}$ または $\overline{p_2})$

②　$(\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2})$　　③　$(\overline{p_1}$ かつ $\overline{p_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{q_1}$ かつ $\overline{q_2})$

(2)　自然数 n に対する条件 p_1，p_2，q_1，q_2 を次のように定める。

p_1：n は素数である　　p_2：$n+2$ は素数である

q_1：$n+1$ は 5 の倍数である　　q_2：$n+1$ は 6 の倍数である

30 以下の自然数 n のなかで［　イ　］と［ウエ］は，

命題「$(p_1$ かつ $p_2)$ $\Longrightarrow$ $(\overline{q_1}$ かつ $q_2)$」の反例となる。　[2015]

解答例

(1)　命題「$(p_1$ かつ $p_2)$ $\Longrightarrow$ $(q_1$ かつ $q_2)$」の対偶は，

「$(\overline{q_1 \text{ かつ } q_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{p_1 \text{ かつ } p_2})$」$\Longleftrightarrow$「$(\overline{q_1}$ または $\overline{q_2})$ $\Longrightarrow$ $(\overline{p_1}$ または $\overline{p_2})$」

(2)　$(p_1$ かつ $p_2)$ ： n と $n+2$ がともに素数，すなわち $(n,\ n+2)$ は双子素数である

$(\overline{q_1}$ かつ $q_2)$ ： $n+1$ は 5 の倍数ではないが，6 の倍数である

さて，30 以下の自然数 n のなかで，命題「$(p_1$ かつ $p_2)$ $\Longrightarrow$ $(\overline{q_1}$ かつ $q_2)$」の反例は，$(n,\ n+2)$ は双子素数であるが，$n+1$ は 5 の倍数であるか，または 6 の倍数ではないものとなる。そこで，まず n が 30 以下の双子素数は，

$(n,\ n+2)=(3,\ 5)$，$(5,\ 7)$，$(11,\ 13)$，$(17,\ 19)$，$(29,\ 31)$

すると，$n+1$ が 5 の倍数であるか，または 6 の倍数ではないものは，右表より，$n=3$，29 である。

n	3	5	11	17	29
$n+1$	4	6	12	18	30

コメント

命題についての基本事項の確認です。設問(1)と(2)は，内容的には独立しています。なお，双子素数については，隣接する 2 つの奇数がともに素数であるものを，小さい方から探していきます。

問　題

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 106 ページの三角比の表を用いてもよい。

水平な地面（以下，地面）に垂直に立っている電柱の高さを，その影の長さと太陽高度を利用して求めよう。

図 1 のように，電柱の影の先端は坂の斜面（以下，坂）にあるとする。また，坂には傾斜を表す道路標識が設置されていて，そこには 7% と表示されているとする。

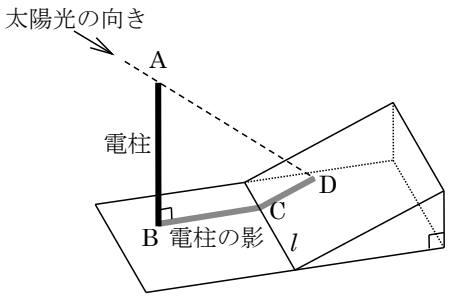


図 1

電柱の太さと影の幅は無視して考えるものとする。また，地面と坂は平面であるとし，地面と坂が交わってできる直線を l とする。

電柱の先端を点 A とし，根もとを点 B とする。電柱の影について，地面にある部分を線分 BC とし，坂にある部分を線分 CD とする。線分 BC, CD がそれぞれ l と垂直であるとき，電柱の影は坂に向かってまっすぐにのびているということにする。

電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびているとする。このとき，4 点 A, B, C, D を通る平面は l と垂直である。その平面において，図 2 のように，直線 AD と直線 BC の交点を P とすると，太陽高度とは∠APB の大きさのことである。

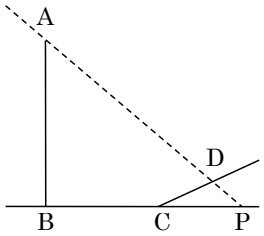


図 2

道路標識の 7% という表示は，この坂をのぼったとき，100 m の水平距離に対して 7 m の割合で高くなることを示している。n を 1 以上 9 以下の整数とするとき，坂の傾斜角∠DCP の大きさについて，$n° < \angle DCP < n° + 1°$ を満たす n の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。

以下では，∠DCP の大きさは，ちょうど $\boxed{\text{ア}}$ ° であるとする。

ある日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたとき，影の長さを調べたところ BC = 7 m，CD = 4 m であり，太陽高度は∠APB = 45° であった。点 D から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を E とするとき

$$BE = \boxed{\text{イ}} \times \boxed{\text{ウ}}\ \text{m}$$

であり，$DE = \left(\boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}} \times \boxed{\text{カ}} \right)$ m である。よって，電柱の高さは，小数第 2 位で四捨五入すると $\boxed{\text{キ}}$ m であることがわかる。

ウ，カ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\sin\angle\mathrm{DCP}$	① $\dfrac{1}{\sin\angle\mathrm{DCP}}$	② $\cos\angle\mathrm{DCP}$
③ $\dfrac{1}{\cos\angle\mathrm{DCP}}$	④ $\tan\angle\mathrm{DCP}$	⑤ $\dfrac{1}{\tan\angle\mathrm{DCP}}$

キ の解答群

⓪ 10.4	① 10.7	② 11.0
③ 11.3	④ 11.6	⑤ 11.9

別の日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたときの太陽高度は $\angle\mathrm{APB}=42^\circ$ であった。電柱の高さがわかったので，前回調べた日からの影の長さの変化を知ることができる。電柱の影について，坂にある部分の長さは

$$\mathrm{CD}=\frac{\mathrm{AB}-\boxed{\text{ク}}\times\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}+\boxed{\text{サ}}\times\boxed{\text{ケ}}}\,\mathrm{m}$$

である。$\mathrm{AB}=\boxed{\text{キ}}\,\mathrm{m}$ として，これを計算することにより，この日の電柱の影について，坂にある部分の長さは，前回調べた 4 m より約1.2 m だけ長いことがわかる。

ケ ～ サ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\sin\angle\mathrm{DCP}$	① $\cos\angle\mathrm{DCP}$	② $\tan\angle\mathrm{DCP}$
③ $\sin 42^\circ$	④ $\cos 42^\circ$	⑤ $\tan 42^\circ$

[2024]

解答例

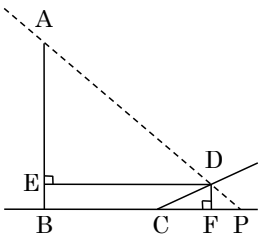


図 2 において，点 D から直線 AB，BP に垂直な直線をひき，それぞれ DE, DF とする。

さて，坂の傾斜角 $\angle\mathrm{DCP}$ について，$\tan\angle\mathrm{DCP}=\dfrac{7}{100}=0.07$

三角比の表から，$\tan 4^\circ=0.0699$，$\tan 5^\circ=0.0875$ なので，

$$\tan 4^\circ<\tan\angle\mathrm{DCP}<\tan 5^\circ$$

$n^\circ<\angle\mathrm{DCP}<n^\circ+1^\circ$ を満たす n の値は $n=4$ であり，以下，$\angle\mathrm{DCP}=4^\circ$ とする。

ここで，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CD}=4$，太陽高度 $\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ のとき，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{DF}=\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{DCP}=4\sin\angle\mathrm{DCP}$$

$$\mathrm{DE}=\mathrm{BF}=\mathrm{BC}+\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{DCP}=7+4\cos\angle\mathrm{DCP}$$

すると，$\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ から，$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{BE}=\mathrm{DE}+\mathrm{BE}$ となり，

$$\mathrm{AB}=(7+4\cos\angle\mathrm{DCP})+4\sin\angle\mathrm{DCP}=7+4(\sin 4^\circ+\cos 4^\circ)$$

$$=7+4(0.0698+0.9976)=7+4\times1.0674\fallingdotseq 11.3$$

また，太陽高度 $\angle \mathrm{APB}=42^\circ$ の別の日に，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CD}=x$ とすると，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{DF}=x\sin\angle\mathrm{DCP}\,,\ \ \mathrm{DE}=\mathrm{BF}=7+x\cos\angle\mathrm{DCP}$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{BE}=\mathrm{DE}\tan 42^\circ+\mathrm{BE}=(7+x\cos\angle\mathrm{DCP})\tan 42^\circ+x\sin\angle\mathrm{DCP}$$

これより，$x(\sin\angle\mathrm{DCP}+\cos\angle\mathrm{DCP}\tan 42^\circ)=\mathrm{AB}-7\tan 42^\circ$ となり，

$$\mathrm{CD}=x=\frac{\mathrm{AB}-7\tan 42^\circ}{\sin\angle\mathrm{DCP}+\cos\angle\mathrm{DCP}\tan 42^\circ}$$

そして，$\mathrm{AB}=11.3$ とすると，$\mathrm{CD}\fallingdotseq 5.2=4+1.2$ となる。

コメント

三角比の応用問題で，共通テストらしい題材です。最後の設問は解答群を見ながら立式します。

問　題

(1)　点 O を中心とし，半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A, B を AB＝6 となるようにとる。また，円 O の円周上に，2 点 A, B とは異なる点 C をとる。

(i)　$\sin\angle ACB =$ $\boxed{\text{ア}}$ である。また，点 C を∠ACB が鈍角となるようにとるとき，$\cos\angle ACB =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(ii)　点 C を△ABC の面積が最大となるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を D とするとき，$\tan\angle OAD =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。また，△ABC の面積は $\boxed{\text{エオ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\frac{3}{5}$	① $\frac{3}{4}$	② $\frac{4}{5}$	③ 1	④ $\frac{4}{3}$
⑤ $-\frac{3}{5}$	⑥ $-\frac{3}{4}$	⑦ $-\frac{4}{5}$	⑧ -1	⑨ $-\frac{4}{3}$

(2)　半径が 5 である球 S がある。この球面上に 3 点 P, Q, R をとったとき，これらの 3 点を通る平面 α 上で PQ＝8，QR＝5，RP＝9 であったとする。

球 S の球面上に点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき，その体積を求めよう。

まず，$\cos\angle QPR = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ であることから，△PQR の面積は $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

次に，点 T から平面 α に垂直な直線を引き，平面 α との交点を H とする。このとき, PH, QH, RH の長さについて，$\boxed{\text{サ}}$ が成り立つ。

以上より，三角錐 TPQR の体積は $\boxed{\text{シス}}\left(\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}+\sqrt{\boxed{\text{タ}}}\right)$ である。

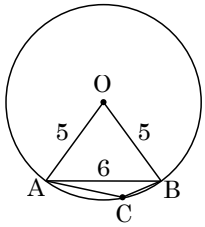
$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ PH＜QH＜RH	① PH＜RH＜QH
② QH＜PH＜RH	③ QH＜RH＜PH
④ RH＜PH＜QH	⑤ RH＜QH＜PH
⑥ PH＝QH＝RH	

[2023]

解答例

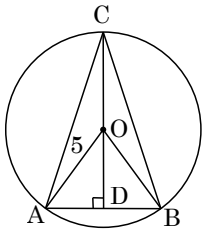
(1)　(i)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=5$，$\mathrm{AB}=6$ である△ABC に正弦定理を適用すると，



$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=2\cdot5,\ \sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$\angle\mathrm{ACB}>\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\angle\mathrm{ACB}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

(ii)　点 C を△ABC の面積が最大となるようにとるとき，点 C から直線 AB への垂直な直線と直線 AB との交点 D は，線分 AB の中点である。

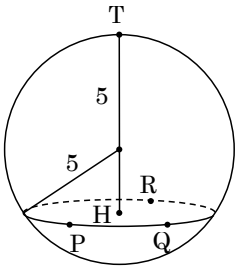


すると，$\mathrm{AD}=\dfrac{6}{2}=3$ から，$\mathrm{OD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ となり，

$$\tan\angle\mathrm{OAD}=\frac{4}{3}$$

このとき，△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot(5+4)=27$ である。

(2)　半径が 5 である球 S 上に 3 点 P, Q, R をとり，これらの 3 点を通る平面 α 上で，$\mathrm{PQ}=8$，$\mathrm{QR}=5$，$\mathrm{RP}=9$ である。

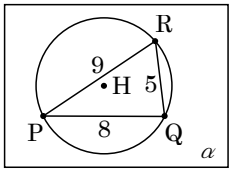


このとき，△PQR に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{QPR}=\frac{9^2+8^2-5^2}{2\cdot9\cdot8}=\frac{5}{6}$$

△PQR の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot9\cdot8\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=36\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}=6\sqrt{11}$

ここで，球 S 上の点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき，点 T から平面 α への垂直な直線と平面 α との交点 H は，△PQR の外心となり，



$$\mathrm{PH}=\mathrm{QH}=\mathrm{RH}$$

そして，$\sin\angle\mathrm{QPR}=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ から，△PQR に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle\mathrm{QPR}}=2\mathrm{PH},\ \mathrm{PH}=\frac{5}{2\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}}=\frac{15}{\sqrt{11}}$$

したがって，三角錐 TPQR の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot6\sqrt{11}\cdot\left\{5+\sqrt{5^2-\left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2}\right\}=2\sqrt{11}\left(5+5\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=10(\sqrt{11}+\sqrt{2})$$

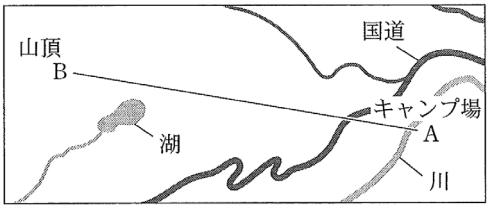
コメント

(1)(2)とも，図形の計量についての頻出タイプの問題です。

問　題

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 106 ページの三角比の表を用いてもよい。

太郎さんと花子さんは，キャンプ場のガイドブックにある地図を見ながら，後のように話している。



参考図

太郎：キャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角度はどれくらいかな。

花子：地図アプリを使って，地点 A と山頂 B を含む断面図を調べたら，図 1 のようになったよ。点 C は，山頂 B から地点 A を通る水平面に下ろした垂線とその水平面との交点のことだよ。

太郎：図 1 の角度 θ は，AC，BC の長さを定規で測って，三角比の表を用いて調べたら16° だったよ。

花子：本当に16° なの？　図 1 の鉛直方向の縮尺と水平方向の縮尺は等しいのかな？

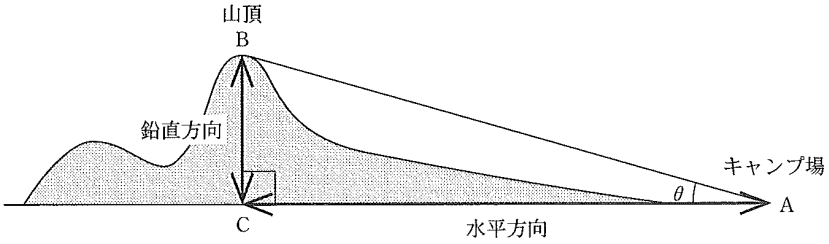


図　1

図 1 の θ はちょうど16° であったとする。しかし，図 1 の縮尺は，水平方向が $\dfrac{1}{100000}$ であるのに対して，鉛直方向は $\dfrac{1}{25000}$ であった。

実際にキャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角である∠BAC を考えると，tan∠BAC は $\boxed{\text{ア}}$.$\boxed{\text{イウエ}}$ となる。したがって，∠BAC の大きさは $\boxed{\text{オ}}$。ただし，目の高さは無視して考えるものとする。

オ の解答群

⓪	3° より大きく 4° より小さい	①	ちょうど 4° である
②	4° より大きく 5° より小さい	③	ちょうど 16° である
④	48° より大きく 49° より小さい	⑤	ちょうど 49° である
⑥	49° より大きく 50° より小さい	⑦	63° より大きく 64° より小さい
⑧	ちょうど 64° である	⑨	64° より大きく 65° より小さい

[2022]

解答例

図 1 において，$\mathrm{AC}=x$，$\mathrm{BC}=y$ とおくと，$\dfrac{y}{x}=\tan 16^\circ=0.2867$

水平方向の縮尺は $\dfrac{1}{100000}$，鉛直方向の縮尺は $\dfrac{1}{25000}$ から，実際の $\angle\mathrm{BAC}$ について，

$$\tan\angle\mathrm{BAC}=\frac{25000y}{100000x}=\frac{y}{4x}=\frac{1}{4}\times 0.2867 \fallingdotseq 0.072$$

すると，$\tan 4^\circ<\tan\angle\mathrm{BAC}<\tan 5^\circ$ から，$\angle\mathrm{BAC}$ は 4° より大きく 5° より小さい。

コメント

測量について，三角比を利用する問題です。

問　題

外接円の半径が 3 である△ABC を考える。点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。

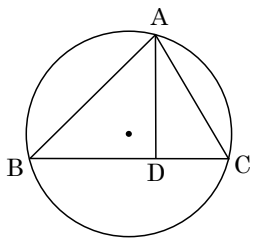
(1)　$AB=5$，$AC=4$ とする。このとき，$\sin\angle ABC=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$AD=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

(2)　2 辺 AB, AC の長さの間に $2AB+AC=14$ の関係があるとする。
このとき, AB の長さのとり得る値の範囲は $\boxed{カ}\leqq AB\leqq\boxed{キ}$ であり,
$AD=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}AB^2+\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}AB$ と表せるので, AD の長さの最大値は $\boxed{ス}$ である。

[2022]

解答例

外接円の半径が 3 の△ABC について, 点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。



(1)　正弦定理より，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=2\cdot 3$ なので，

$AB=5$，$AC=4$ であるとき，$\sin\angle ABC=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

$$AD=AB\sin\angle ABC=5\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$$

(2)　正弦定理より，$AB=6\sin\angle ACB$ ……①，$AC=6\sin\angle ABC$ ……②

まず，$0<\sin\angle ACB\leqq 1$ なので，①から $0<AB\leqq 6$ ……③

また，$2AB+AC=14$ から $AC=14-2AB$ となり，$0<\sin\angle ABC\leqq 1$ と②から，

$0<14-2AB\leqq 6$，$4\leqq AB<7$ ……④

③④より，$4\leqq AB\leqq 6$ である。

すると，$AD=AB\sin\angle ABC=AB\cdot\dfrac{AC}{6}=AB\cdot\dfrac{14-2AB}{6}=-\dfrac{1}{3}AB^2+\dfrac{7}{3}AB$ より，

$$AD=-\frac{1}{3}\left(AB-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{12}$$

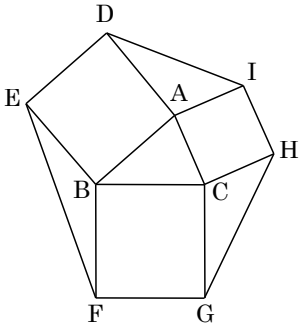
$4\leqq AB\leqq 6$ から，AD は，$AB=4$ のとき最大値 $4\cdot\dfrac{14-2\cdot 4}{6}=4$ をとる。

コメント

三角比の平面図形への応用という頻出題です。なお, AB の取り得る値の範囲は, 各辺の長さが直径を超えないということから導いても構いません。

問　題

右の図のように，△ABC の外側に辺 AB, BC, CA をそれぞれ 1 辺とする正方形 ADEB, BFGC, CHIA をかき，2 点 E と F, G と H, I と D をそれぞれ線分で結んだ図形を考える。以下において，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，$\angle\mathrm{CAB}=A$，$\angle\mathrm{ABC}=B$，$\angle\mathrm{BCA}=C$ とする。



参考図

(1)　$b=6$，$c=5$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin A=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{ウエ}}$，△AID の面積は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(2)　正方形 BFGC, CHIA, ADEB の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。このとき，$S_1-S_2-S_3$ は

・$0^\circ<A<90^\circ$ のとき，$\boxed{\text{キ}}$。

・$A=90^\circ$ のとき，$\boxed{\text{ク}}$。

・$90^\circ<A<180^\circ$ のとき，$\boxed{\text{ケ}}$。

$\boxed{\text{キ}}$～$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　0 である

①　正の値である

②　負の値である

③　正の値も負の値もとる

(3)　△AID, △BEF, △CGH の面積をそれぞれ T_1，T_2，T_3 とする。このとき $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪　$a<b<c$ ならば，$T_1>T_2>T_3$

①　$a<b<c$ ならば，$T_1<T_2<T_3$

②　A が鈍角ならば，$T_1<T_2$ かつ $T_1<T_3$

③　a, b, c の値に関係なく，$T_1=T_2=T_3$

(4)　△ABC, △AID, △BEF, △CGH のうち，外接円の半径が最も小さいものを求める。

$0^\circ<A<90^\circ$ のとき，ID $\boxed{\text{サ}}$ BC であり

(△AID の外接円の半径) $\boxed{\text{シ}}$ (△ABC の外接円の半径)

であるから，外接円の半径が最も小さい三角形は

・$0^\circ < A < B < C < 90^\circ$ のとき，［ス］である。

・$0^\circ < A < B < 90^\circ < C$ のとき，［セ］である。

［サ］，［シ］の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

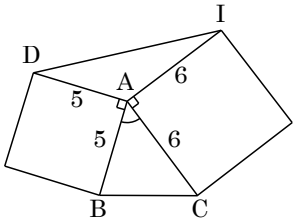
［ス］，［セ］の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ △ABC	① △AID	② △BEF	③ △CGH

[2021]

解答例

(1)　$b=6$，$c=5$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$ のとき，

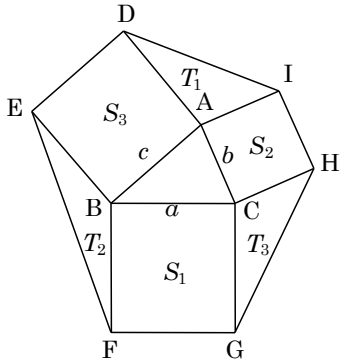


$$\sin A=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5},\ \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4}{5}=12$$

$\angle\mathrm{IAD}=180^\circ-A$ から，$\sin\angle\mathrm{IAD}=\sin A$ となり，

$$\triangle\mathrm{AID}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\sin\angle\mathrm{IAD}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4}{5}=12$$

(2)　$S=S_1-S_2-S_3$ とおくと，$S=a^2-b^2-c^2$ から，



$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき $a^2 < b^2+c^2$ より $S<0$

$A=90^\circ$ のとき $a^2=b^2+c^2$ より $S=0$

$90^\circ < A < 180^\circ$ のとき $a^2 > b^2+c^2$ より $S>0$

(3)　(1)と同様に，$T_1=\dfrac{1}{2}bc\sin(180^\circ-A)=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

$$T_2=\frac{1}{2}ca\sin B,\ T_3=\frac{1}{2}ab\sin C$$

ここで，△ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理から，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ となり，

$$T_1=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R},\ T_2=\frac{1}{2}ca\cdot\frac{b}{2R}=\frac{abc}{4R},\ T_3=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

よって，③「a, b, c の値に関係なく $T_1=T_2=T_3$」である。

(4)　余弦定理から，$\mathrm{BC}^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ となり，

$$\mathrm{ID}^2=b^2+c^2-2bc\cos(180^\circ-A)=b^2+c^2+2bc\cos A$$

$0^\circ < A < 90^\circ$ のとき $\cos A>0$ なので，$\mathrm{ID}^2>\mathrm{BC}^2$，すなわち $\mathrm{ID}>\mathrm{BC}$ である。

さて，△AID，△BEF，△CGH の外接円の半径を，それぞれ R_1，R_2，R_3 とおく。

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin A}=\frac{\mathrm{CA}}{2\sin B}=\frac{\mathrm{AB}}{2\sin C},\ R_1=\frac{\mathrm{ID}}{2\sin A},\ R_2=\frac{\mathrm{EF}}{2\sin B},\ R_3=\frac{\mathrm{GH}}{2\sin C}$$

すると，$R_1 > R$，すなわち(△AID の外接円の半径)＞(△ABC の外接円の半径)

また，$0° < A < B < C < 90°$ のとき，$R_1 > R$ かつ $R_2 > R$ かつ $R_3 > R$ より，R が最小となり，外接円の半径が最も小さい三角形は△ABC である。

さらに，$0° < A < B < 90° < C$ のとき，$R_1 > R$ かつ $R_2 > R$，そして $R_3 < R$ であるので，R_3 が最小となり，外接円の半径が最も小さい三角形は△CGH である。

コメント

三角比の平面図形への応用問題で，(4)までうまく誘導がつけられています。

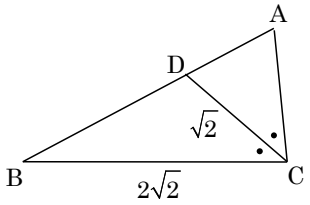
問　題

△ABC において，$BC=2\sqrt{2}$ とする。∠ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とし，$CD=\sqrt{2}$，$\cos\angle BCD=\dfrac{3}{4}$ とする。このとき，$BD=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，

$\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。$\dfrac{AC}{AD}=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ であるから，$AD=$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

また，△ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。　[2020]

解答例



$BC=2\sqrt{2}$ である△ABC において，∠ACB の二等分線と辺 AB の交点を D とすると，$CD=\sqrt{2}$，$\cos\angle BCD=\dfrac{3}{4}$ となり，△BCD に余弦定理を適用すると，

$$BD^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}=4$$

これより，$BD=2$ となる。

さて，$\sin\angle BCD=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ から，△BCD に正弦定理を適用すると，

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\angle BDC},\quad \sin\angle BDC=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

よって，$\sin\angle ADC=\sin(180^\circ-\angle BDC)=\sin\angle BDC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$

また，線分 CD は∠ACB の二等分線なので，$AD:BD=AC:BC$ から，

$$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

これより，$AD=x$ とおくと $AC=\sqrt{2}x$ となり，△ACD に余弦定理を適用すると，

$$(\sqrt{2}x)^2=(\sqrt{2})^2+x^2-2\sqrt{2}x\cos\angle ADC$$

ここで，$BD^2+CD^2<BC^2$ より $\angle BDC>90^\circ$ となり，$\angle ADC<90^\circ$ である。

すると，$\cos\angle ADC=\sqrt{1-\dfrac{14}{16}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となり，$2x^2=2+x^2-2\sqrt{2}x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}=0$

$$x^2+x-2=0,\quad (x+2)(x-1)=0$$

よって，$AD=x=1$ となる。

このとき，$AC=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$ なので，△ACD は二等辺三角形である。

よって，$\sin\angle DAC=\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ となる。

ここで，△ABC に正弦定理を適用すると，△ABC の外接円の半径 R は，

$$R=\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

コメント

三角比の応用問題です。与えられた条件に正弦定理や余弦定理を適用するだけですが，その選択方法には運・不運がつきまといます。なお，最後の設問は 2 倍角公式という手もあります。

問　題

△ABC において，AB＝3，BC＝4，AC＝2 とする。

次の $\boxed{\text{エ}}$ には，下の ⓪～②のうちから当てはまるものを 1 つ選べ。

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，∠BAC は $\boxed{\text{エ}}$ である。

また，$\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

⓪　鋭角　　①　直角　　②　鈍角

線分 AC の垂直二等分線と直線 AB の交点を D とする。

$\cos\angle\mathrm{CAD}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であるから，AD＝$\boxed{\text{コ}}$ であり，△DBC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。　[2019]

解答例

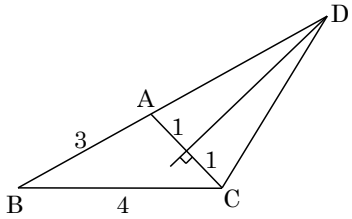
AB＝3，BC＝4，AC＝2 である△ABC において，余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{9+4-16}{2\cdot3\cdot2}=-\frac{1}{4}$$

これより，∠BAC は鈍角であり，$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

さて，線分 AC の垂直二等分線と直線 AB の交点を D とすると，∠CAD＝180°－∠BAC より，

$$\cos\angle\mathrm{CAD}=-\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{4}$$



すると，$\mathrm{AD}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\dfrac{1}{\cos\angle\mathrm{BAC}}=4$

さらに，$\sin\angle\mathrm{CAD}=\sin\angle\mathrm{BAC}$ から，

$$\triangle\mathrm{DBC}=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{7}{4}\sqrt{15}$$

コメント

三角比と図形の基本題です。論理的な飛躍の感じられる設問はありません。

問　題

四角形 ABCD において，3 辺の長さをそれぞれ $AB=5$，$BC=9$，$CD=3$，対角線 AC の長さを $AC=6$ とする。このとき，

$$\cos\angle ABC=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad \sin\angle ABC=\frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$

である。

ここで，四角形 ABCD は台形であるとする。

次の $\boxed{カ}$ には下の ⓪～②から，$\boxed{キ}$ には ③・④から当てはまるものを 1 つずつ選べ。

CD $\boxed{カ}$ $AB\cdot\sin\angle ABC$ であるから $\boxed{キ}$ である。

⓪ $<$　　① $=$　　② $>$

③ 辺 AD と辺 BC が平行　④ 辺 AB と辺 CD が平行

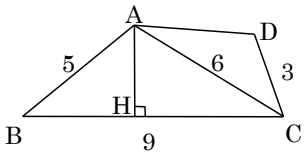
したがって，$BD=\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$ である。　[2018]

解答例

$AB=5$，$BC=9$，$CD=3$，$AC=6$ である四角形 ABCD において，

$$\cos\angle ABC=\frac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot5\cdot9}=\frac{7}{9}$$

$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\frac{7^2}{9^2}}=\frac{\sqrt{(9+7)(9-7)}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

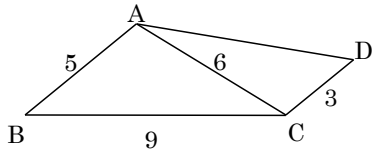


さて，$AB\cdot\sin\angle ABC=5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{20\sqrt{2}}{9}$ なので，

$$\frac{20\sqrt{2}}{9}-3=\frac{1}{9}(20\sqrt{2}-27)>\frac{1}{9}(20\times1.4-27)>0$$

すると，$CD<AB\cdot\sin\angle ABC$ となる。そこで，頂点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろすと $CD<AH$ となるので，辺 AD と辺 BC が平行である場合はない。

よって，四角形 ABCD が台形のとき，辺 AB と辺 CD が平行になり，



$$\cos\angle BCD=\cos(180^\circ-\angle ABC)$$
$$=-\cos\angle ABC=-\frac{7}{9}$$

$$BD^2=9^2+3^2-2\cdot9\cdot3\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=132$$

したがって，$BD=\sqrt{132}=2\sqrt{33}$ である。

コメント

基本的な三角比の応用問題です。詳しい誘導が付けられています。

問　題

△ABC において，$AB=\sqrt{3}-1$，$BC=\sqrt{3}+1$，$\angle ABC=60^\circ$ とする。

(1)　$AC=\sqrt{\boxed{ア}}$ であるから，△ABC の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{イ}}$ であり

$$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}+\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$

である。ただし，$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ の解答の順序は問わない。

(2)　辺 AC 上に点 D を，△ABD の面積が $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ になるようにとるとき

$$AB\cdot AD=\frac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}-\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

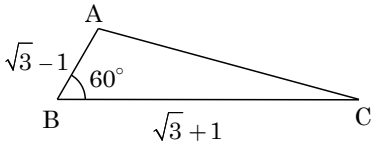
であるから，$AD=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。　[2017]

解答例

(1)　△ABC に余弦定理を適用して，

$$AC^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ=6$$

よって，$AC=\sqrt{6}$ となり，△ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理から，



$$2R=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin\angle BAC},\quad R=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

また，$\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である。

(2)　辺 AC 上に点 D をとり，$\triangle ABD=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ から $\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ となるので，

$$AB\cdot AD=\frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$$

これより，$AD=\dfrac{2\sqrt{3}-2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2}{3}$ である。

コメント

図形の計量についての基本事項の確認です。

問　題

△ABC の辺の長さと角の大きさを測ったところ，$AB=7\sqrt{3}$ および $\angle ACB=60^\circ$ であった。したがって，△ABC の外接円 O の半径は $\boxed{\text{ア}}$ である。

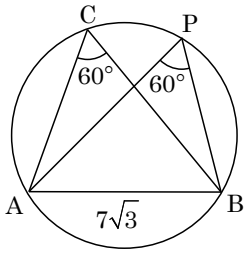
外接円 O の，点 C を含む弧 AB 上で点 P を動かす。

(1)　$2PA=3PB$ となるのは $PA=\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ のときである。

(2)　△PAB の面積が最大となるのは $PA=\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ のときである。

(3)　$\sin\angle PBA$ の値が最大となるのは $PA=\boxed{\text{キク}}$ のときであり，このとき△PAB の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。　[2016]

解答例



△ABC の外接円 O の半径を R とおくと，正弦定理から，

$$\frac{7\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R,\quad R=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=7$$

(1)　余弦定理から，$PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos 60^\circ=(7\sqrt{3})^2$

$$PA^2+PB^2-PA\cdot PB=147\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$2PA=3PB$ なので $PB=\dfrac{2}{3}PA$ となり，$(*)$から，

$$PA^2+\frac{4}{9}PA^2-\frac{2}{3}PA^2=147$$

よって，$\dfrac{7}{9}PA^2=147$ から，$PA=3\sqrt{21}$

(2)　△PAB の面積が最大となるのは $PA=PB$ のときであり，$(*)$から，

$$PA^2+PA^2-PA^2=147,\quad PA=7\sqrt{3}$$

(3)　正弦定理から $\sin\angle PBA=\dfrac{PA}{2\cdot 7}$ となり，この値が最大となるのは PA が外接円 O の直径となるときである。すなわち，$PA=14$ のときである。

このとき，$\angle PBA=90^\circ$ となり，$PB=\sqrt{14^2-(7\sqrt{3})^2}=7\sqrt{4-3}=7$ から，

$$\triangle PAB=\frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{3}\cdot 7=\frac{49}{2}\sqrt{3}$$

コメント

センター試験に頻出の円に内接する四角形を題材とした基本的な問題です。

問　題

△ABC において，AB＝3，BC＝5，∠ABC＝120° とする。このとき，

AC＝$\boxed{\text{ア}}$，$\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\sin\angle\mathrm{BCA}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

直線 BC 上に点 D を，$\mathrm{AD}=3\sqrt{3}$ かつ∠ADC が鋭角，となるようにとる。点 P を線分 BD 上の点とし，△APC の外接円の半径を R とすると，R のとり得る値の範囲は

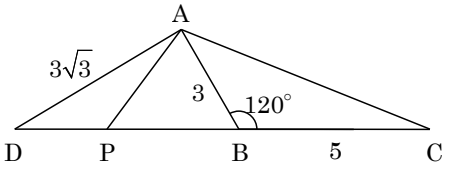
$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\leqq R\leqq\boxed{\text{コ}}$ である。　[2015]

解答例

△ABC に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{AC}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos120^\circ=49$$

$$\mathrm{AC}=7$$



また，$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から，正弦定理を適用して，

$$\frac{3}{\sin\angle\mathrm{BCA}}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}},\quad \sin\angle\mathrm{BCA}=\frac{1}{7}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

さて，AP のとり得る値は，△ADB において，∠D が鋭角で∠ABD＝60° から，

$$3\sin60^\circ\leqq\mathrm{AP}\leqq3\sqrt{3},\quad \frac{3\sqrt{3}}{2}\leqq\mathrm{AP}\leqq3\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

△APC の外接円の半径 R は，正弦定理より，$2R=\dfrac{\mathrm{AP}}{\sin\angle\mathrm{BCA}}$

$$R=\frac{14}{2\cdot3\sqrt{3}}\mathrm{AP}=\frac{7}{3\sqrt{3}}\mathrm{AP}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{7}{3\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\leqq R\leqq\dfrac{7}{3\sqrt{3}}\cdot3\sqrt{3}$ となり，$\dfrac{7}{2}\leqq R\leqq7$

コメント

三角比の三角形への応用です。平面幾何との融合が不可能になったので，内容的には易しめです。

問　題

座標平面上に 4 点 O(0, 0)，A(6, 0)，B(4, 6)，C(0, 6) を頂点とする台形 OABC がある。また，この座標平面上で，点 P, Q は次の**規則**に従って移動する。

規則

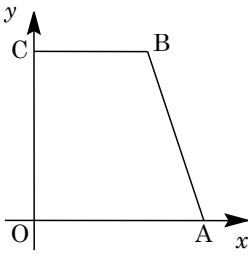
・P は，O から出発して毎秒 1 の一定の速さで x 軸上を正の向きに A まで移動し，A に到達した時点で移動を終了する。

・Q は，C から出発して y 軸上を負の向きに O まで移動し，O に到達した後は y 軸上を正の向きに C まで移動する。そして，C に到達した時点で移動を終了する。ただし，Q は毎秒 2 の一定の速さで移動する。

・P, Q は同時刻に移動を開始する。

この**規則**に従って P, Q が移動するとき，P, Q はそれぞれ A, C に同時刻に到達し，移動を終了する。

以下において，P, Q が移動を開始する時刻を**開始時刻**，移動を終了する時刻を**終了時刻**とする。



参考図

(1)　**開始時刻**から 1 秒後の△PBQ の面積は $\boxed{\text{ア}}$ である。

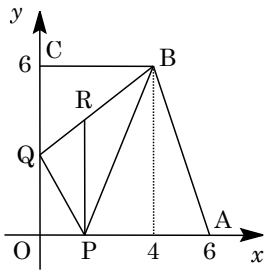
(2)　**開始時刻**から 3 秒間の△PBQ の面積について，面積の最小値は $\boxed{\text{イ}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(3)　**開始時刻**から**終了時刻**までの△PBQ の面積について，面積の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(4)　**開始時刻**から**終了時刻**までの△PBQ の面積について，面積が 10 以下となる時間は $\left(\boxed{\text{ク}}-\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\right)$ 秒間である。　[2024]

解答例

[1]　4 点 O(0, 0)，A(6, 0)，B(4, 6)，C(0, 6) を頂点とする台形 OABC に対して，与えられた規則によって，点 P, Q が移動する。そして，点 P から y 軸に平行な直線と直線 QB との交点を R，△PBQ の面積を S とおく。



(1)　開始時刻から 1 秒後に，P(1, 0)，Q(0, 4) より，

$$\text{QB}: y=\frac{6-4}{4}x+4=\frac{1}{2}x+4$$

$x=1$ のとき $y=\dfrac{9}{2}$ から，$\text{R}\left(1,\ \dfrac{9}{2}\right)$ となり，$S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot 4=9$ である。

(2)　開始時刻から t 秒後 $(0\leqq t\leqq 3)$ において，P$(t,\ 0)$，Q$(0,\ 6-2t)$ より，

$$\mathrm{QB}: y=\frac{6-(6-2t)}{4}x+6-2t=\frac{t}{2}x+6-2t$$

$x=t$ のとき $y=\dfrac{t^2}{2}-2t+6$ から，$\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{t^2}{2}-2t+6\right)$ となり，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-2t+6\right)\cdot 4=t^2-4t+12=(t-2)^2+8 \cdots\cdots\cdots ①$$

$0 \leqq t \leqq 3$ において，S の最小値は $8\,(t=2)$，最大値は $12\,(t=0)$ となる。

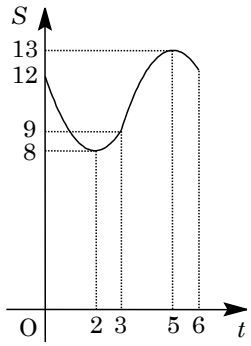
(3)　開始時刻から t 秒後 $(3 \leqq t \leqq 6)$ において，$\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2t-6)$ より，

$$\mathrm{QB}: y=\frac{6-(2t-6)}{4}x+2t-6=-\frac{t-6}{2}x+2t-6$$

$x=t$ のとき $y=-\dfrac{t^2-6t}{2}+2t-6=-\dfrac{t^2}{2}+5t-6$ から，$\mathrm{R}\left(t,\ -\dfrac{t^2}{2}+5t-6\right)$ となり，

$$S=\frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{2}+5t-6\right)\cdot 4=-t^2+10t-12=-(t-5)^2+13 \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，①②から $0 \leqq t \leqq 6$ における S のグラフは右図のようになり，S の最小値は $8\,(t=2)$，最大値は $13\,(t=5)$ である。



(4)　$0 \leqq t \leqq 3$ において，$S=10$ となるのは，①から，

$$(t-2)^2+8=10,\ t=2-\sqrt{2}$$

$3 \leqq t \leqq 6$ において，$S=10$ となるのは，②から，

$$-(t-5)^2+13=10,\ t=5-\sqrt{3}$$

これより，$S \leqq 10$ となる時間は，右図より，

$$(5-\sqrt{3})-(2-\sqrt{2})=3-\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

コメント

ときどき見かける 2 次関数の問題です。設定がわかりやすく，量的にも少ないので，勢いをつけるのに適切ではないかと思えます。なお，三角形の面積 S については，いろいろな求め方があります。