２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

筑波大学

理系数学 25か年

１９９９ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策

筑 波 大 学

理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1999 年度以降に出題された筑波大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」「確率分布」「コンピュータ」は範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1, 2,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とし，θ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ と $\cos 4\theta$ を，それぞれ t を用いて表せ。

(3)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\cos 4\theta$ であるとき，t の値をすべて求めよ。　[2021]

2　$k>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。放物線 $C: y=x^2-kx$ と直線 $l: y=(\tan\theta)x$ の交点のうち，原点 O と異なるものを P とする。放物線 C の点 O における接線を l_1 とし，点 P における接線を l_2 とする。直線 l_1 の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ で，直線 l_2 の傾きが $\tan 2\theta$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　k を求めよ。

(2)　$\tan\theta$ を求めよ。

(3)　直線 l_1 と l_2 の交点を Q とする。$\angle\mathrm{PQO}=\alpha$（ただし $0\leqq\alpha\leqq\pi$）とするとき，$\tan\alpha$ を求めよ。　[2019]

3　$f(x)$，$g(t)$ を，$f(x)=x^3-x^2-2x+1$，$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$ とおく。

(1)　$2g(t)-1=f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，$2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。　[2013]

4　x の方程式 $|\log_{10}x|=px+q$（p，q は実数）が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする。

（Ⅰ）　3 つの解の比は，$1:2:3$ である。

（Ⅱ）　3 つの解のうち最小のものは，$\dfrac{1}{2}$ より大きく，1 より小さい。

このとき，$A=\log_{10}2$，$B=\log_{10}3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ。

[2012]

5　以下の問いに答えよ。

(1)　等式$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$を示せ。

(2)　$2\cos 80°$は3次方程式$x^3 - 3x + 1 = 0$の解であることを示せ。

(3)　$x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80°)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$となる角度$\alpha$，$\beta$を求めよ。ただし$0° < \alpha < \beta < 180°$とする。　[2009]

6　p, q を正の実数とする。x の方程式 $\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx) + 1 = 0$ が 1 より大きい解をもつとき，点$(\log_{10} p,\ \log_{10} q)$の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

[2008]

7　$f(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 8$とする。

(1)　$(x^2 + t)^2 - f(x) = (px + q)^2$が x の恒等式となるような整数 t, p, q の値を 1 組求めよ。

(2)　(1)で求めた t, p, q の値を用いて方程式$(x^2 + t)^2 = (px + q)^2$を解くことにより，方程式$f(x) = 0$の解をすべて求めよ。　[2006]

■ 図形と式

1　t, p を実数とし，$t > 0$とする。xy 平面において，原点 O を中心とし点A$(1,\ t)$を通る円をC_1とする。また，点 A におけるC_1の接線を l とする。直線$x = p$を軸とする 2 次関数のグラフC_2は，x 軸と接し，点 A において直線 l とも接するとする。

(1)　直線 l の方程式を t を用いて表せ。

(2)　p を t を用いて表せ。

(3)　C_2 と x 軸の接点を M とし，C_2 と y 軸の交点を N とする。t が正の実数全体を動くとき，三角形 OMN の面積の最小値を求めよ。　[2022]

2　xy 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0,\ C_2 : x^2 - 8x + y^2 - 4y + k = 0$$

が外接するとし，その接点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　k の値を求めよ。

(2)　P の座標を求めよ。

(3)　円C_1と円C_2の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある。これらの 2 直線の交点 Q の座標を求めよ。　[2021]

3　xy 平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする△ABC の内接円を T とする。点 $\mathrm{D}(0,\ -1)$ を通り，傾きが正である直線を $l: y=ax-1$ とする。

(1)　円 T の半径を r とする。r を求めよ。

(2)　直線 l と円 $x^2+y^2=1$ の交点のうち，D と異なる点を E とする。点 E の座標を a を用いて表せ。

(3)　直線 l が円 T に接するとする。このとき，(2)で求めた点 E を通り，x 軸と平行な直線が，円 T に接することを示せ。　[2020]

4　xy 平面において，円 $x^2+y^2=1$ の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を C_1 とする。また，直線 $y=x$ の $x \leqq 0$ を満たす部分を C_2 とする。C_1 上の点 A，C_2 上の点 B および点 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$ について，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるとする。点 A の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする。ただし $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　点 B の x 座標を θ を用いて表せ。

(2)　線分 AB の中点の x 座標が 0 以上であるような θ の範囲を求めよ。　[2020]

5　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\tan\theta,\ \tan^2\theta)$，$\mathrm{B}(-\tan\theta,\ \tan^2\theta)$ をとる。三角形 OAB の内心の y 座標を p とし，外心の y 座標を q とする。また，正の実数 a に対して，直線 $y=a$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。

(1)　$p,\ q$ を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　$\dfrac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos\theta$ の値をすべて求めよ。　[2018]

6　a を正の実数とする。2 つの関数

$$y=\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3,\quad y=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

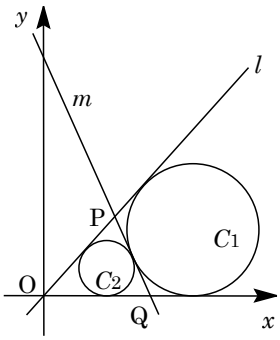
のグラフは，2 点 A, B で交わる。ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。また，2 点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を l とする。

(1)　2 点 A, B の座標を a を用いて表せ。

(2)　直線 l の方程式を a を用いて表せ。

(3)　原点と直線 l の距離 d を a を用いて表せ。また，$a>0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。　[2017]

7　xy 平面の直線 $y=(\tan 2\theta)x$ を l とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 C_1，C_2 を以下の(i)～(iv)で定める。



(i)　円 C_1 は直線 l および x 軸の正の部分と接する。

(ii)　円 C_1 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。

(iii) 円 C_2 は直線 l，x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する。

(iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1>d_2$ を満たす。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，x 軸，直線 l と異なる直線を m とし，直線 m と直線 l，x 軸との交点をそれぞれ P, Q とする。

(1)　円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

(3)　(2)の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。　[2016]

8　以下の問いに答えよ。

(1)　座標平面において，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x^2+y\leqq 1,\quad x-y\leqq 1$$

(2)　2 つの放物線 $y=x^2-2x+k$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　x, y が(1)の連立不等式を満たすとき，$y-x^2+2x$ の最大値および最小値と，それらを与える x, y の値を求めよ。　[2015]

9　$f(x)=x^3-x$ とする。$y=f(x)$ のグラフに点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた接線は 3 本あるとする。3 つの接点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする。

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を a, b を用いて表せ。

(2)　点 G の座標を a, b を用いて表せ。

(3)　点 G の x 座標が正で，y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ。　[2014]

10　O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を C とする。

(1)　C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ。 [2011]

11　xy 平面上に 2 定点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ をとる。また，m を 1 より大きい実数とする。

(1)　$\mathrm{AP}:\mathrm{OP}=m:1$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　点 A を通る直線で，(1)で求めた軌跡との共有点が 1 個のものを求めよ。また，その共有点の座標も求めよ。 [2007]

■ 図形と計量

1　半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が，辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また，$\alpha=\angle\mathrm{CAB}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とし，三角形 ABC の面積を S とする。

(1)　線分 AQ の長さを α を用いて表し，線分 QC の長さを β を用いて表せ。

(2)　$t=\tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく。このとき，S を t を用いて表せ。

(3)　不等式 $S\geqq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するのは，三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。 [2015]

■ ベクトル

1　座標空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面 S 上に 4 つの頂点がある四面体 ABCD が，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{0}$ を満たしているとする。また三角形 ABC の重心を G とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を r を用いて表せ。

(3)　点 P が球面 S 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の最大値を r を用いて表せ。さらに，最大値をとるときの点 P に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$ を r を用いて表せ。 [2023]

2　$0<t<1$ とする。平行四辺形 ABCD について，線分 AB, BC, CD, DA を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ A_1，B_1，C_1，D_1 とする。さらに，点 A_2，B_2，C_2，D_2 および A_3，B_3，C_3，D_3 を次の条件を満たすように定める。

(条件)　$k=1,\ 2$ について，点 A_{k+1}，B_{k+1}，C_{k+1}，D_{k+1} は，それぞれ線分 A_kB_k，B_kC_k，C_kD_k，D_kA_k を $t:1-t$ に内分する。

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{A_1B_1}=p\vec{a}+q\vec{b}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=x\vec{a}+y\vec{b}$ を満たす実数 p, q, x, y を t を用いて表せ。

(2)　四角形 $A_1B_1C_1D_1$ は平行四辺形であることを示せ。

(3)　$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{A_3B_3}$ が平行となるような t の値を求めよ。　[2022]

3　O を原点とする座標空間において，3 点 $A(-2,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面を α とする。2 点 $P(0,\ 5,\ 5)$，$Q(1,\ 1,\ 1)$ をとる。点 P を通り $\overrightarrow{OQ}$ に平行な直線を l とする。直線 l 上の点 R から平面 α に下ろした垂線と α の交点を S とする。$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+k\overrightarrow{OQ}$ (ただし k は実数)とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　k を用いて，$\overrightarrow{AS}$ を成分で表せ。

(2)　点 S が△ABC の内部または周にあるような k の値の範囲を求めよ。　[2021]

4　四面体 OABC について，$OA=OB=OC$ および $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$ が成り立つとする。$0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数 s, t に対し，辺 OA を $s:1-s$ に内分する点を D とし，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を E とする。$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{OC}$ となる点 F, G をとり，線分 EF と線分 DG が 1 点で交わるとし，その交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\angle AOB=\theta$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$t=s$ であることを示し，$\overrightarrow{OP}$ を s, $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DG}$ であるとき，$\cos\theta$ を s を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DG}$ かつ $\sqrt{3}\,OP=OA$ であるとき，s の値を求めよ。　[2019]

5　四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。このとき等式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ が成り立つとする。t は実数の定数で，$0<t<1$ を満たすとする。線分 OA を $t:1-t$ に内分する点を P とし，線分 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q とする。また，線分 PQ の中点を M とする。

(1)　$\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と t を用いて表せ。

(2)　線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき，線分 OB の長さを求めよ。

(3)　4 点 O, A, B, C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする。このとき，△OAB と△OCB は合同であることを示せ。　[2016]

6　四面体 OABC において，次が満たされているとする。

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$$

点 A, B, C を通る平面を α とする。点 O を通り平面 α と直交する直線と，平面 α との交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ。

(2)　点 H は△ABC の垂心であること，すなわち $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ を示せ。

(3)　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1$ とする。このとき，△ABC の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ。　[2012]

7　点 O を原点とする座標平面上に，2 点 A(1, 0)，B($\cos\theta$, $\sin\theta$) ($90°<\theta<180°$) をとり，以下の条件を満たす 2 点 C, D を考える。

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=1$$

また，△OAB の面積を S_1，△OCD の面積を S_2 とおく。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ の成分を求めよ。

(2)　$S_2=2S_1$ が成り立つとき，θ と S_1 の値を求めよ。

(3)　$S=4S_1+3S_2$ を最小にする θ と，そのときの S の値を求めよ。　[2010]

8　座標空間において，原点 O を通り方向ベクトル($\cos\theta$, $\sin\theta$, 0) をもつ直線を L_θ とする。点 A(2, 0, 1) から直線 L_θ に下ろした垂線と L_θ との交点を P_θ とする。

(1)　θ が実数全体を動くとき，P_θ は xy 平面内の円周上を動くことを示し，その中心の座標と半径を求めよ。

(2)　θ が $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする。三角形 OAP_θ の面積の最大値と，そのときの P_θ の座標を求めよ。　[2006]

■ 整数と数列

1　O を原点とする xy 平面上に 2 直線 $l: y=\sqrt{3}x$，$m: y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ がある。正の整数 n に対して，l 上に点 $\mathrm{P}_n(n,\ \sqrt{3}n)$ をとり，m 上に点 $\mathrm{Q}_n\left(x_n,\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$ をとる。ただし，x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は次の条件(I), (II)を満たすとする。

(I)　$x_1=1$ である。

(II)　$n \geqq 2$ のとき，x_n は，Q_{n-1} を通り l と平行な直線と，x 軸との交点の x 座標である。

また，正の整数 n に対して，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ の面積を a_n とする。

(1)　x_n を n を用いて表せ。

(2)　a_n を n を用いて表せ。

(3)　正の整数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ と定める。S_n を n を用いて表せ。　[2020]

2　正三角形 OAB に対し，直線 OA 上の点 P_1，P_2，P_3，…および直線 OB 上の点 Q_1，Q_2，Q_3，…を，次の(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)を満たすようにとる。

(Ⅰ)　$\mathrm{P}_1=\mathrm{A}$ である。

(Ⅱ)　線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$，…はすべて直線 OA に垂直である。

(Ⅲ)　線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$，$\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$，$\mathrm{Q}_3\mathrm{P}_4$，…はすべて直線 OB に垂直である。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。点 O を基準とする位置ベクトルが，整数 k, l によって $k\vec{a}+l\vec{b}$ と表される点全体の集合を S とする。n を自然数とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ で定まる点 R が線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にあるとき，x を y を用いて表せ。

また，線分 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上にある S の点の個数を求めよ。

(3)　三角形 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ の周または内部にある S の点の個数を求めよ。　[2018]

3　数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとする。また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$b_n \geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(2)　b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　a_{2017} の一の位の数を求めよ。　[2017]

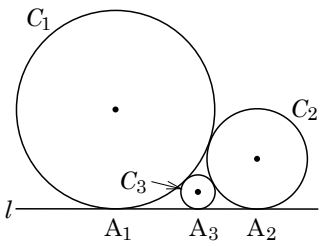
4　p と q は正の整数とする。2 次方程式 $x^2-2px-q=0$ の 2 つの実数解を α，β とする。ただし $\alpha>\beta$ とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\dfrac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。ただし，$\alpha^0=1$，$\beta^0=1$ と定める。

(1)　すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}=2pa_{n+1}+qa_n$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 n に対して，a_n は整数であることを示せ。

(3)　自然数 n に対し，$\dfrac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする。p と q が $q<2p+1$ を満たすとき，b_n を a_n を用いて表せ。　[2015]

5　平面上の直線 l に同じ側で接する 2 つの円 C_1，C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している。l，C_1，C_2 で囲まれた領域内に，これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に l，C_n，C_{n+1}　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で囲まれた領域内にあり，これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$r_1=16$，$r_2=9$ とする。



(1)　l が C_1，C_2，C_3 と接する点を，それぞれ A_1，A_2，A_3 とおく。線分 A_1A_2，A_1A_3，A_2A_3 の長さおよび r_3 の値を求めよ。

(2)　ある定数 a, b に対して $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを示せ。a, b の値も求めよ。

(3)　(2)で求めた a, b に対して，2 次方程式 $t^2=at+b$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とする。$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$ を満たす有理数 c, d の値を求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

(4)　(3)の c, d, α，β に対して，$x_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を α，β を用いて表せ。　[2014]

6　3つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が

$$a_{n+1}=-b_n-c_n,\ b_{n+1}=-c_n-a_n,\ c_{n+1}=-a_n-b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

および$a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=c$を満たすとする。ただし，a, b, cは定数とする。

(1)　$p_n=a_n+b_n+c_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{p_n\}$の初項から第 n 項までの和S_nを求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{q_n\}$の初項から第 $2n$ 項までの和をT_nとする。$a+b+c$が奇数であれば，すべての自然数 n に対してT_nが正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。　[2013]

7　数列$\{a_n\}$を，$a_1=1$，$(n+3)a_{n+1}-na_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定める。

(1)　$b_n=n(n+1)(n+2)a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　等式　$p(n+1)(n+2)+qn(n+2)+rn(n+1)=b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つように，定数$p, q, r$の値を定めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$を$n$の式で表せ。　[2011]

8　自然数の数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$(5+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすものとする。

(1)　$\sqrt{2}$は無理数であることを示せ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}をa_n，b_nを用いて表せ。

(3)　すべての自然数nに対して，$a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$が成り立つような定数$p$，$q$を2組求めよ。

(4)　a_n，b_nをnを用いて表せ。　[2009]

9　2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$a_1=3,\ b_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(3a_n+5b_n),\ b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+3b_n)$$

(1)　すべての自然数nについて，${a_n}^2-5{b_n}^2=4$であることを示せ。

(2)　すべての自然数 n について，a_n，b_nは自然数かつa_n+b_nは偶数であることを証明せよ。　[2008]

10 (1)　一般項 a_n が an^3+bn^2+cn で表される数列 $\{a_n\}$ において，$n^2=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つように，定数 a, b, c を定めよ。

(2)　(1)の結果を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ となることを示せ。

(3)　1, 2, …, n の相異なる 2 数の積のすべての和を $S(n)$ とする。たとえば，$S(3)=1\times2+1\times3+2\times3=11$ である。$S(n)$ を n の 4 次式で表せ。　[2007]

■ 確率

1　整数 a_1，a_2，a_3，…を，さいころをくり返し投げることにより，以下のように定めていく。まず，$a_1=1$ とする。そして，正の整数 n に対し，a_{n+1} の値を，n 回目に出たさいころの目に応じて，次の規則で定める。

(規則)　n 回目に出た目が 1, 2, 3, 4 なら $a_{n+1}=a_n$ とし，5, 6 なら $a_{n+1}=-a_n$ とする。

たとえば，さいころを 3 回投げ，その出た目が順に 5, 3, 6 であったとすると，$a_1=1$，$a_2=-1$，$a_3=-1$，$a_4=1$ となる。

$a_n=1$ となる確率を p_n とする。ただし，$p_1=1$ とし，さいころのどの目も，出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとする。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3)　$p_n \leqq 0.5000005$ を満たす最小の正の整数 n を求めよ。
ただし，$0.47<\log_{10}3<0.48$ であることを用いてよい。　[2022]

■ 論証

1　以下の問いに答えよ。

(1)　a, b, c, x, y, z, M は正の実数とする。$\dfrac{x}{a}$，$\dfrac{y}{b}$，$\dfrac{z}{c}$ がすべて M 以下のとき，$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}\leqq M$ であることを示せ。

(2)　$\log_2 5$ と $\log_3 5$ の大小を比較せよ。

(3)　n が正の整数のとき，$1<\dfrac{1+\log_2 5+(\log_2 5)^n}{1+\log_3 5+(\log_3 5)^n}<2^n$ であることを示せ。　[2019]

■ 複素数

1　i を虚数単位とする。複素数平面に関する以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $|z+2|=2|z-1|$ を満たす点 z の全体が表す図形は円であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。

(2)　等式 $\{|z+2|-2|z-1|\}|z+6i|=3\{|z+2|-2|z-1|\}|z-2i|$ を満たす点 z の全体が表す図形を S とする。このとき S を複素数平面上に図示せよ。

(3)　点 z が(2)における図形 S 上を動くとき，$w=\dfrac{1}{z}$ で定義される点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。　[2023]

2　i は虚数単位とする。次の条件(I), (II)をどちらも満たす複素数 z 全体の集合を S とする。

(I)　z の虚部は正である。

(II)　複素数平面上の点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(1-iz)$，$\mathrm{C}(z^2)$ は一直線上にある。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　1 でない複素数 α について，α の虚部が正であることは，$\dfrac{1}{\alpha-1}$ の虚部が負であるための必要十分条件であることを示せ。

(2)　集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(3)　$w=\dfrac{1}{z-1}$ とする。z が S を動くとき，$\left|w+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right|$ の最小値を求めよ。　[2022]

3　i は虚数単位とする。複素数平面において，複素数 z の表す点 P を $\mathrm{P}(z)$ または点 z とかく。$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき，3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(\omega)$，$\mathrm{C}(\omega^2)$ を頂点とする△ABC を考える。

(1)　△ABC は正三角形であることを示せ。

(2)　点 z が辺 AC 上を動くとき，点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(3)　点 z が辺 AB 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_1 とする。また，点 z が辺 AC 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_2 とする。E_1 と E_2 の共有点をすべて求めよ。

[2021]

4　i は虚数単位とする。複素数 z に対して，その共役複素数を $\overline{z}$ で表す。複素数平面上で，次の等式を満たす点 z の全体が表す図形を C とする。

$$z\overline{z}+(1+3i)z+(1-3i)\overline{z}+9=0$$

以下の問いに答えよ。

(1)　図形 C を複素数平面上に描け。

(2)　複素数 w に対して，$\alpha=w+\overline{w}-1$，$\beta=w+\overline{w}+1$ とする。w，α，β が表す複素数平面上の点をそれぞれ P，A，B とする。点 P は C 上を動くとする。△PAB の面積が最大となる複素数 w，およびそのときの△PAB の外接円の中心と半径を求めよ。

[2020]

5　$|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ を満たす複素数 z 全体の集合を A とする。ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数である。

(1)　集合 A を複素数平面上に図示せよ。

(2)　A の要素 z の偏角を θ とする。ただし $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。z が A を動くとき，θ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　z^{60} が正の実数となる A の要素 z の個数を求めよ。　[2019]

6　複素数 α に対して，複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$ を考える。次の条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする。

(Ⅰ)　α は実数でも純虚数でもない。

(Ⅱ)　$|\alpha|>1$ である。

(Ⅲ)　三角形 OAB は直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　α が S に属するとき，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(2)　集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(3)　x，y を $\alpha^2=x+yi$ を満たす実数とする。α が S を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求め，図示せよ。　[2018]

7　$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とする。複素数平面上において，原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $\mathrm{P}_1(w_1)$，$\mathrm{P}_2(w_2)$，$\mathrm{P}_3(w_3)$，$\mathrm{P}_4(w_4)$，$\mathrm{P}_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり，次の 2 つの条件(Ⅰ), (Ⅱ)を満たすとする。

(Ⅰ)　$(\cos^2 a)(w_2-w_1)^2+(\sin^2 a)(w_5-w_1)^2=0$ が成り立つ。

(Ⅱ)　$\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ の解である。

また，五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1)　五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle\mathrm{P}_5\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を求めよ。

(2)　S を a を用いて表せ。

(3)　$R=|w_1+w_2+w_3+w_4+w_5|$ とする。このとき，R^2+2S は a の値によらないことを示せ。　[2017]

8　複素数平面上を動く点 z を考える。次の問いに答えよ。

(1)　等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。

(2)　点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。

(3)　a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。　[2016]

9　α を実数でない複素数とし，β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1)　複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき，C は原点を通る円であることを示せ。

(2)　複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また，その 2 点を P, Q とするとき，線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3)　β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P, Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。　[2015]

■ 曲線

1　xy 平面上に楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1\ (a>\sqrt{13})$，および双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ があり，C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t>0)$ における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1)　a と b の間に成り立つ関係式を求め，点 P の座標を a を用いて表せ。

(2)　l_1 と l_2 が直交することを示せ。

(3)　a が $a>\sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ。　[2014]

2　楕円 $C : \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の，直線 $y=mx$ と平行な 2 接線を l_1，$l_1{}'$ とし，l_1，$l_1{}'$ に直交する C の 2 接線を l_2，$l_2{}'$ とする。

(1)　l_1，$l_1{}'$ の方程式を m を用いて表せ。

(2)　l_1 と $l_1{}'$ の距離 d_1 および l_2 と $l_2{}'$ の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし，平行な 2 直線 l，l' の距離とは，l 上の 1 点と直線 l' の距離である。

(3)　$(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4)　l_1，$l_1{}'$，l_2，$l_2{}'$ で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ。　[2013]

3　2 つの双曲線 $C : x^2-y^2=1$，$H : x^2-y^2=-1$ を考える。双曲線 H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ に対して，方程式 $sx-ty=1$ で定まる直線を l とする。

(1)　直線 l は点 P を通らないことを示せ。

(2)　直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わることを示し，△PQR の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

(3)　(2)における 3 点 G, Q, R に対して，△GQR の面積は点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の位置によらず一定であることを示せ。　[2012]

4　d を正の定数とする。2 点 $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A, 点 B, 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP とかく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

(2)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ。

(3)　点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

[2011]

5　直線 $l: mx+ny=1$ が，楕円 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ に接しながら動くとする。

(1)　点 $(m,\ n)$ の軌跡は楕円になることを示せ。

(2)　C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ と l との距離を d_1 とし，もう 1 つの焦点 $F_2(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ と l との距離を d_2 とする。このとき $d_1d_2=b^2$ を示せ。　[2010]

6　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。

(1)　$f(a)$ を a で表せ。

(2)　$f(a)$ を a の関数とみなすとき, ab 平面上に曲線 $b=f(a)$ の概形をかけ。

[2009]

7　放物線 $C: y=x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$　$(s<t)$ における接線の交点を $R(X,\ Y)$ とする。

(1)　X, Y を t, s を用いて表せ。

(2)　点 P, Q が $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら C 上を動くとき，点 R は双曲線上を動くことを示し，かつ，その双曲線の方程式を求めよ。　[2008]

8　xy 平面上で，2 次曲線 $C: x^2+ay^2+by=0$ が直線 $L: y=2x-1$ に点 P で接している。ただし，$a\neq-\dfrac{1}{4}$ とする。

(1)　a と b の関係式を求めよ。

(2)　C が楕円，放物線，双曲線となるそれぞれの場合に, b の値の範囲を求めよ。

(3)　C が楕円となる場合の接点 P の存在範囲を求め, xy 平面上に図示せよ。　[2007]

9　xy 平面において，媒介変数 t を用いて，$x=2\left(t+\dfrac{1}{t}+1\right)$，$y=t-\dfrac{1}{t}$ と表される曲線を C とする。

(1)　曲線 C の方程式を求め，その概形をかけ。

(2)　点 $(a,\ 0)$ を通り曲線 C に接する直線があるような a の値の範囲と，そのときの接線の方程式をすべて求めよ。　[2006]

10　実数 a に対して，曲線 C_a を方程式 $(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$ によって定める。

(1)　C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ。

(2)　a が正の実数全体を動くとき，C_a が通過する範囲を図示せよ。　[2005]

11　楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点で，$x\geqq 0$ の範囲にあり，定点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ との距離が最大となる点を P とする。

(1)　点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2)　点 Q は楕円 C 上を動くとする。△APQ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および△APQ の面積を求めよ。　[2004]

12　2 点 $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$ を焦点とする双曲線 C_1 と 2 点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を焦点とする楕円 C_2 は 2 点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ のみを共有している。

(1)　C_1 と C_2 の方程式を，それぞれ求めよ。

(2)　C_1 と漸近線を共有し，C_1 と異なる双曲線を C_3 とする。C_2 と C_3 が 2 点のみを共有するとき，C_3 の方程式を求めよ。　[2003]

13　a を正の実数とする。曲線 C_a を極方程式 $r=2a\cos(a-\theta)$ によって定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C_a は円になることを示し，その中心と半径を求めよ。

(2)　C_a が直線 $y=-x$ に接するような a をすべて求めよ。　[2002]

14　C を双曲線 $2x^2-2y^2=1$ とする。l, m を点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸とそれぞれ θ，$\theta+\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

(1)　直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2)　PQ^2 を，θ を用いて表せ。

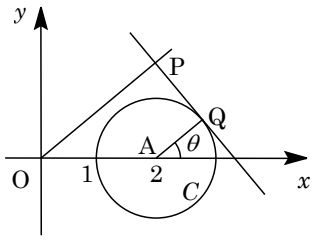
(3)　直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}$ は θ によらない定数となることを示せ。　[2001]

15　次の問いに答えよ。

(1)　点 $(3,\ 0)$ を通り，円 $(x+3)^2+y^2=4$ と互いに外接する円の中心 $(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　(1)の軌跡上の点と定点 $(0,\ a)$ との距離の最小値を求めよ。　[2000]

16　xy 平面上において，点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。C 上の点 Q における C の接線に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ から下ろした垂線の足を P とする。図のように x 軸と線分 AQ のなす角を θ とする。ただし，θ は $-\pi<\theta\leqq\pi$ を動くものとする。



(1)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 $(x,\ y)$ を θ を用いて表せ。

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x 座標が最小になるとき, P の座標 $(x,\ y)$ を求めよ。

(3)　直線 $x=k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるとき, k のとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

■ 極限

1　O を原点とする xy 平面において，点 A$(-1,\ 0)$ と点 B$(2,\ 0)$ をとる。円 $x^2+y^2=1$ の，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を C とし，また点 B を通り y 軸に平行な直線を l とする。2 以上の整数 n に対し，曲線 C 上に点 P，Q を $\angle \mathrm{POB}=\dfrac{\pi}{n}$，$\angle \mathrm{QOB}=\dfrac{\pi}{2n}$ を満たすようにとる。直線 AP と直線 l の交点を V とし，直線 AQ と直線 l の交点を W とする。線分 AP，線分 AQ および曲線 C で囲まれた図形の面積を $S(n)$ とする。また線分 PV，線分 QW，曲線 C および線分 VW で囲まれた図形の面積を $T(n)$ とする。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{S(n)+T(n)\}$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{S(n)}$ を求めよ。　[2021]

2　数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=\dfrac{c}{1+c}$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。ただし, c は正の実数である。

(1)　a_2，a_3 を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ を求めよ。　[2020]

3　数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$t>0$ のとき，$1 \leqq \dfrac{e^t-1}{t} \leqq e^t$ であることを示せ。

(2)　数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ を

$$x_n=\log(e^{a_n}+1),\quad y_n=\log(e^{a_n}-1),\quad z_n=y_n+\sum_{k=1}^{n}x_k \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。z_n は n によらない定数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{e^{a_k}+1}{2}\right)$ を求めよ。　[2019]

4　$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ とし，$c \geqq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=c$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1)　$f(\pi)$ を求めよ。また，$x \geqq \pi$ のとき，$0<f'(x) \leqq \dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

(2)　すべての自然数 n に対して，$a_n \geqq \pi$ が成り立つことを示せ。

(3)　すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi| \leqq \dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。　[2018]

5　xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す。記号 $[\ \ ]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

(1)　n を $0 \leqq n \leqq N$ を満たす整数とする。点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

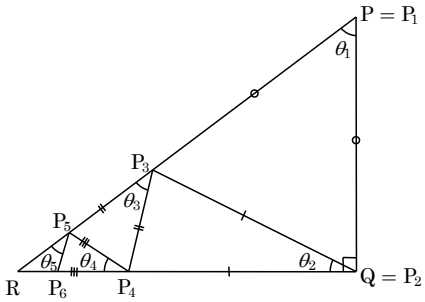
(2)　直線 $y=x$ と，x 軸，および直線 $x=N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。

(3)　曲線 $y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0 \leqq x \leqq N)$ と，x 軸，および直線 $x=N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2)の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。　[2017]

6　$\triangle$PQR において $\angle \mathrm{RPQ}=\theta$，$\angle \mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ とする。点 P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次で定める。

$$\mathrm{P}_1=\mathrm{P},\ \mathrm{P}_2=\mathrm{Q},\ \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}=\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$$

ただし，点 P_{n+2} は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}$ 上にあるものとする。実数 θ_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$\theta_n=\angle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}$ $(0<\theta_n<\pi)$ で定める。



(1)　θ_2，θ_3 を θ を用いて表せ。

(2)　$\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は n によらない定数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n$ を求めよ。　[2016]

7　曲線 $C: y=\dfrac{1}{x+2}$ $(x>-2)$ を考える。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l_1 とし，l_1 と x 軸との交点を Q_1，点 Q_1 を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 とおく。以下同様に，自然数 $n\,(n\geqq 2)$ に対して，点 P_n における接線を l_n とし，l_n と x 軸との交点を Q_n，点 Q_n を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_{n+1} とおく。

(1)　l_1 の方程式を求めよ。

(2)　P_n の x 座標を x_n $(n\geqq 1)$ とする。x_{n+1} を x_n を用いて表し，x_n を n を用いて表せ。

(3)　l_n，x 軸，y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n を求め，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。　[2012]

8　e は自然対数の底とする。$t>e$ において関数 $f(t)$，$g(t)$ を次のように定める。

$$f(t)=\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}\,dx,\quad g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}\,dx$$

(1)　$f(t)-g(t)$ を t の 1 次式で表せ。

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} g(t)=0$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となる定数 a, b を求めよ。　[2008]

9　曲線 $C: y=e^x$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\ e^a)$，$\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す。さらに，$r(a)=\displaystyle\lim_{t\to a} L_a(t)$ と定義する。

(1)　$r(a)$ を求めよ。

(2)　a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ。　[2005]

■ 微分法

1　曲線 $C: y=x-x^3$ 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ における接線を l とし，C と l の共有点のうち A とは異なる点を B とする。また，$-2<t<1$ とし，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t-t^3)$ をとる。さらに，三角形 ABP の面積を $S(t)$ とする。

(1)　点 B の座標を求めよ。

(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　t が $-2<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2023]

2　$f(x)=x^{-2}e^x\ (x>0)$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C とする。また h を正の実数とする。さらに，正の実数 t に対して，曲線 C，2 直線 $x=t$，$x=t+h$，および x 軸で囲まれた図形の面積を $g(t)$ とする。

(1)　$g'(t)$ を求めよ。

(2)　$g(t)$ を最小にする t がただ 1 つ存在することを示し，その t を h を用いて表せ。

(3)　(2)で得られた t を $t(h)$ とする。このとき極限値 $\lim_{h\to+0} t(h)$ を求めよ。　[2023]

3　$0<a<4$ とする。曲線

$$C_1 : y=4\cos^2 x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right),\ C_2 : y=a-\tan^2 x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

は，ちょうど 2 つの共有点をもつとする。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2022]

4　曲線 $C : y=(x+1)e^{-x}\ (x>-1)$ 上の点 P における法線と x 軸との交点を Q とする。点 P の x 座標を t とし，点 Q と点 $\mathrm{R}(t,\ 0)$ との距離を $d(t)$ とする。

(1)　$d(t)$ を t を用いて表せ。

(2)　$x\geqq 0$ のとき $e^x \geqq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$ であることを示せ。

(3)　点 P が曲線 C 上を動くとき，$d(t)$ の最大値を求めよ。　[2022]

5　p, q を定数とし，$0<p<1$ とする。

曲線 $C_1 : y=px^{\frac{1}{p}}\ (x>0)$ と，曲線 $C_2 : y=\log x+q\ (x>0)$ が，ある 1 点 $(a,\ b)$ において同じ直線に接するとする。曲線 C_1，直線 $x=a$，直線 $x=e^{-q}$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする。また，曲線 C_2，直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1)　q を p を用いて表せ。

(2)　S_1，S_2 を p を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{S_2}{S_1}\geqq\dfrac{3}{4}$ であることを示せ。ただし，$2.5<e<3$ を用いてよい。　[2021]

6　a, b, c を実数とし，β, m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1)　a, b, c および β, m の値を求めよ。

(2)　関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。　[2017]

7　関数 $f(x)=2x^2-9x+14-\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{x^2}\ (x>0)$ について以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ のすべての極値を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。　[2017]

8　k を実数とする。xy 平面の曲線 $C_1: y=x^2$ と $C_2: y=-x^2+2kx+1-k^2$ が異なる共有点 P, Q をもつとする。ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする。また，原点を O とする。

(1)　k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　k が(1)の範囲を動くとき，△OPQ の重心 G の軌跡を求めよ。

(3)　△OPQ の面積を S とするとき，S^2 を k を用いて表せ。

(4)　k が(1)の範囲を動くとする。△OPQ の面積が最大となるような k の値と，そのときの重心 G の座標を求めよ。　[2016]

9　$f(x)=\log(e^x+e^{-x})$ とおく。曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線を l とする。直線 l と y 軸の交点の y 座標を $b(t)$ とおく。

(1)　次の等式を示せ。$b(t)=\dfrac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}+\log(1+e^{-2t})$

(2)　$x\geqq 0$ のとき，$\log(1+x)\leqq x$ であることを示せ。

(3)　$t\geqq 0$ のとき，$b(t)\leqq\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}+e^{-2t}$ であることを示せ。

(4)　$b(0)=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{4t}{(e^t+e^{-t})^2}dt$ であることを示せ。　[2015]

10　関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x>0$ で考える。$y=f(x)$ のグラフの点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_a とし，l_a と y 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，実数 k に対して $\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t}=0$ であることは証明なしで用いてよい。

(1)　$Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$0<a<b$ である $a,\ b$ に対して，l_a と l_b が x 軸上で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求め，b を a で表せ。

(3)　(2)の $a,\ b$ に対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$ とおく。$\lim_{a\to+0} Z(a)$ および $\lim_{a\to+0}\dfrac{Z'(a)}{a}$ を求めよ。　[2014]

11　$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a>0$ とする。

(1)　$f(-1)\leqq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下になる a の範囲を求めよ。

(3)　$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。　[2010]

12　n を自然数とし，1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して，不等式 $\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\leqq f(k)$ を示せ。

(2)　不等式 $\int_1^n \log x\,dx\leqq \log n!$ を示し，不等式 $n^n e^{1-n}\leqq n!$ を導け。

(3)　$x\geqq 0$ に対して，不等式 $x^n e^{1-x}\leqq n!$ を示せ。　[2010]

13　$a\geqq b>0,\ x\geqq 0$ とし，n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1)　$0\leqq e^x-(1+x)\leqq \dfrac{x^2e^x}{2}$

(2)　$a^n-b^n\leqq n(a-b)a^{n-1}$

(3)　$e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\leqq \dfrac{x^2e^x}{2n}$　[2006]

14　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log|x|}{x} & (|x|>1)\\ ax^3+bx^2+cx+d & (|x|\leqq 1)\end{cases}$$

と定める。ただし, a, b, c, d は定数とし, $f(x)$ は $x=\pm 1$ において微分可能とする。なお, log は $e=2.718\cdots$ を底とする自然対数である。

(1)　a, b, c, d の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最大値を求めよ。　[2004]

15　関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+ax+b}$ が定める曲線 $y=f(x)$ は原点で直線 $y=x$ に接している。

(1)　b の値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ が最大値と最小値をもつような a の値の範囲を求め, そのときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(4)　$f(x)$ が最大値をもつが最小値はもたないとき, a の値と $f(x)$ の最大値を求めよ。

[2003]

16　a を正の定数とし, 関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x)=\frac{\log x}{(1+x)^a}\quad (x>0)$$

このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在することを示せ。

(2)　$f'(c)=0$ となる c はただ 1 つであり, 関数 $f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることを示せ。　[2002]

17　曲線 $y=x(1-x)\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に, 単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1)　水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ。

(2)　空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。　[2001]

18　関数 $f_n(x)=\sin^{n+2}x+2\cos^{n+2}x$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　閉区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ における $f_n(x)$ の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}$ を求めよ。　[2000]

19　すべての正の実数 x について $x^{\sqrt{a}}\leqq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。　[2000]

20　e を自然対数の底とする。関数 $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)=(1+e^x)^2f'(x)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)$ を求めよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いてもよい。

(2)　$f(x)$ はただ 1 つの極値をもち，さらにそれが極大値であることを示せ。　[1999]

21　関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$，$g(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t}\cos t\,dt$ と定める。このとき，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の最大値と $g(x)$ の最小値を求めよ。　[1999]

■ 積分法

1　a, b を実数とし，$f(x)=x+a\sin x$，$g(x)=b\cos x$ とする。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx$ を求めよ。

(2)　不等式 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2dx\geqq\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ が成り立つことを示せ。

(3)　曲線 $y=|f(x)+g(x)|$，2 直線 $x=-\pi$，$x=\pi$，および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき不等式 $V\geqq\dfrac{2}{3}\pi^2(\pi^2-6)$ が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するときの a，b を求めよ。　[2023]

2　自然数 n に対し，関数 $F_n(x)=\int_x^{2x} e^{-t^n}dt \quad (x \geqq 0)$ を考える。

(1)　関数 $F_n(x)$ $(x \geqq 0)$ はただ 1 つの点で最大値をとることを示し，$F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ。

(2)　(1)で求めた a_n に対し，極限値 $\lim_{n\to\infty} \log a_n$ を求めよ。　[2011]

3　$f(x)$ を整式で表される関数とし，$g(x)=\int_0^x e^t f(t)dt$ とおく。任意の実数 x について，$x(f(x)-1)=2\int_0^x e^{-t}g(t)dt$ が成り立つとする。

(1)　$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ。

(3)　$f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。　[2009]

4　(1)　$\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx$ を求めよ。

(2)　定数 a に対して，$f(x)=ax\sin x+x+\dfrac{\pi}{2}$ とおく。このとき，不等式

$$\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx \geqq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす a の範囲を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする。　[2007]

5　次の関係式を満たす関数 $f(x)$ がただ 1 つ存在するように，定数 a の値を求めよ。

$$f(x)=ax+\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt\right)^4$$

[2005]

6　$f(x)=\sin^3 x$ とする。

(1)　$f'(0)$ および $f'(2\pi)$ を求めよ。

(2)　$\int_0^{2\pi} f(x)dx$ を求めよ。

(3)　$p(x)$ を x の 2 次式とするとき，$\int_0^{2\pi} p(x)f''(x)dx=0$ を示せ。　[2004]

7　実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が，次の 2 つの条件(i), (ii)を満たしている。

(i)　すべての x について，$f(x)>0$ である。

(ii)　すべての x, y について，$f(x+y)=f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ。

(1)　$f(0)=1$ を示せ。

(2)　$g(x)=\log f(x)$ とする。このとき，$g'(x)=f'(0)-x$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f'(0)=2$ となるような $f(x)$ を求めよ。　[2003]

8　$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して，関数 $g(x)$ $(x>0)$ を次のように定める。

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt \ (0<x<1),\quad g(x)=\int_{x-1}^x f(t)\,dt \ (x \geqq 1)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x \neq 1$ のおける導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)=2\pi\cos(2\pi x)$ のとき，$g(x)$ を求めよ。

(3)　次のような $g(x)$ を定める $f(x)$ を求めよ。

$$g(x)=\sin(2\pi x)+x \ (0<x<1),\quad g(x)=1 \ (x \geqq 1)$$

[2002]

9　$f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ において連続かつ $0<x<1$ において微分可能で $f'(x)>0$ を満たす関数とする。$0<t<1$ に対し，$I(t)=\int_0^1 |f(t)-f(x)|x\,dx$ とおく。

(1)　導関数 $I'(t)$ を求めよ。

(2)　$I(t)$ が最小となる t の値を求めよ。　[2001]

10　(1)　$x>0$ に対して次の不等式を示せ。

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$$

(2)　$f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ で連続で，$f(x) \geqq 0$ を満たす関数とする。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right),\quad I=\int_0^1 f(x)\,dx$$

とおくとき，$\lim_{n\to\infty} a_n=e^I$ であることを示せ。　[2001]

11　e を自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^x \geqq 1+x$ を示せ。

(2)　$\tan\theta = M\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，等式 $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx = \theta$ を示せ。

(3)　$M>0$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}}dx < \frac{\pi}{2}$ を示せ。　[2000]

■ 積分の応用

1　α，β を実数とし，$\alpha>1$ とする。曲線 $C_1 : y=|x^2-1|$ と曲線 $C_2 : y=-(x-\alpha)^2+\beta$ が，点 $(\alpha,\ \beta)$ と点 $(p,\ q)$ の 2 点で交わるとする。また，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_1 とし，x 軸，直線 $x=\alpha$，および C_1 の $x \geqq 1$ を満たす部分で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1)　p を α を用いて表し，$0<p<1$ であることを示せ。

(2)　S_1 を α を用いて表せ。

(3)　$S_1 > S_2$ であることを示せ。　[2023]

2　関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ を，$f(\theta)=\sin\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$g(\theta)=\sin 2\theta$ と定める。xy 平面上の曲線 C が，媒介変数 θ を用いて

$$x=f(\theta),\ \ y=g(\theta)\ \ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

で表されている。

(1)　次の定積分 I_1，I_2，I_3 の値を求めよ。

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\, d\theta,\ \ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos 2\theta\, d\theta,\ \ I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos 2\theta\, d\theta$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表し，曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

(3)　曲線 C，x 軸および y 軸で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2020]

3　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=1+\sin x,\ g(x)=-1-\cos x$$

と定める。

(1)　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲において，$|f(x)|=|g(x)|$ を満たす x を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$，曲線 $y=g(x)$，直線 $x=0$ および直線 $x=\pi$ で囲まれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2019]

4　放物線 $C: y=x^2+ax+b$ が 2 直線 $l_1: y=px\ (p>0)$，$l_2: y=qx\ (q<0)$ と接している。また，C と l_1，l_2 で囲まれた図形の面積を S とする。

(1)　a, b を p, q を用いてそれぞれ表せ。

(2)　S を p, q を用いて表せ。

(3)　l_1，l_2 が直交するように p, q が動くとき，S の最小値を求めよ。　[2018]

5　2 つの曲線 $C_1: y=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin x}\ (0<x<\pi)$，$C_2: y=\sqrt{2}(\sin x-\cos x)$ $(0<x<\pi)$ について以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の x 座標を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と曲線 C_2 とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V が π^2 であることを示せ。　[2018]

6　関数 $f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}\ (x \geqq 0)$ について次の問いに答えよ。

(1)　$f'(a)=0$，$f''(b)=0$ を満たす a，b を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x}=0$ であることは証明なしで用いてよい。

(2)　$k \geqq 0$ のとき $V(k)=\displaystyle\int_0^k xe^{-2x}dx$ を k を用いて表せ。

(3)　(1)で求めた a，b に対して曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2016]

7　$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x),\ g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\ h(x)=\sin x$$

とおく。3 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$ の $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たす部分を，それぞれ C_1，C_2，C_3 とする。

(1)　C_2 と C_3 の交点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とする。$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(3)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。　[2015]

8　xy 平面上の曲線 $C: y=x\sin x+\cos x-1\ (0<x<\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。ただし $3<\pi<\frac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい。

(1)　曲線 C と x 軸の交点はただ 1 つであることを示せ。

(2)　曲線 C と x 軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ とする。$\alpha>\frac{2}{3}\pi$ であることを示せ。

(3)　曲線 C, y 軸および直線 $y=\frac{\pi}{2}-1$ で囲まれる部分の面積を S とする。また，xy 平面の原点 O，点 A および曲線 C 上の点 $\mathrm{B}\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}-1\right)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を T とする。$S<T$ であることを示せ。　[2014]

9　n は自然数とする。

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t\, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　媒介変数 t によって，

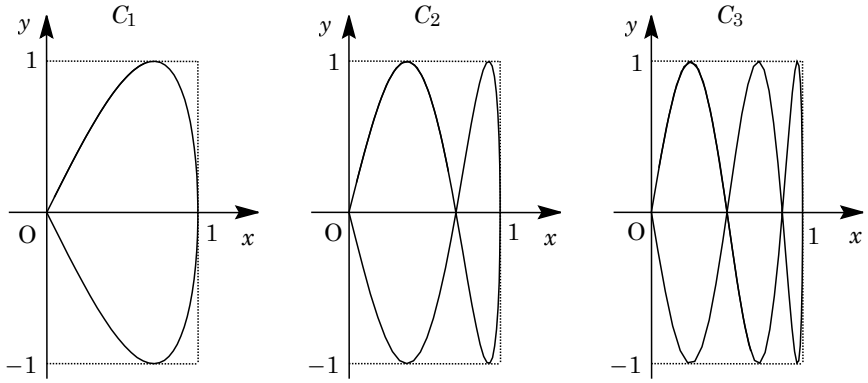
$$x = \sin t,\ \ y = \sin 2nt \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}} - 1\right) \quad (n \geqq 2)$$

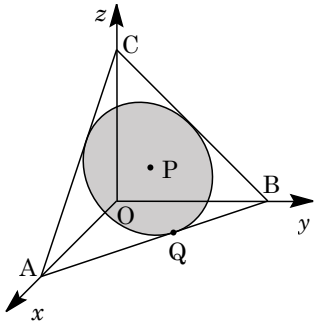
を用いてよい。

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。



[2013]

10　xyz 空間において，点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P，円板 D と辺 AB の接点を Q とする。



(1)　点 P と点 Q の座標を求めよ。

(2)　円板 D が平面 $z = t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。

(3)　円板 D と平面 $z = t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ。

(4)　円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。　[2013]

11　曲線 $C: y=\log x\ (x>0)$ を考える。自然数 n に対して，曲線 C 上に点 $\mathrm{P}(e^n,\ n)$，$\mathrm{Q}(e^{2n},\ 2n)$ をとり，x 軸上に点 $\mathrm{A}(e^n,\ 0)$，$\mathrm{B}(e^{2n},\ 0)$ をとる。四角形 APQB を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(n)$ とする。また，線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $S(n)$ とする。

(1)　$V(n)$ を n の式で表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)}$ を求めよ。　[2012]

12　α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。円 $C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ および，その中心を通る直線 $l: y=(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　直線 l と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ。

(2)　等式 $\displaystyle 2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3)　連立不等式 $y\leqq(\tan\alpha)x-\sin\alpha$，$x^2+(y+\sin\alpha)^2\leqq 1$ の表す xy 平面上の図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2011]

13　3 つの曲線

$$C_1: y=\sin x\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right),\ C_2: y=\cos x\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right),\ C_3: y=\tan x\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の交点，C_2 と C_3 の交点，C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。

(2)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。　[2010]

14　xyz 空間内において，yz 平面上で放物線 $z=y^2$ と直線 $z=4$ で囲まれる平面図形を D とする。点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とし，l のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

(1)　D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする。ただし $0\leqq t\leqq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき，点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値，最小値を求めよ。

(2)　平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)\ (0\leqq t\leqq 4)$ を求めよ。

(3)　E の体積 V を求めよ。　[2009]

15　xyz 空間内の点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$ と，xy 平面上の円 $C: x^2+(y-2)^2=1$ に属する点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 0)$ を考える。

(1)　直線 PQ と平面 $z=t$ の交点の座標を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ を t と θ で表せ。

(2)　線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z=0$，$z=1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ。

(3)　Q が C 上を 1 周するとき, (2)で求めた体積の最大値, 最小値を求めよ。　[2008]

16　関数 $f(x)=b+\dfrac{1}{b}-e^{ax}-e^{-ax}$ について，以下の問いに答えよ。ただし，$a>0$, $b>1$ とする。

(1)　$f(x)\geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ。

(2)　曲線 $y=\sqrt{f(x)}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(3)　$a=b\log b$ のとき，(2)で求めた体積 V を $V(b)$ と表す。このとき，$\displaystyle\lim_{b\to\infty}V(b)=2\pi$ となることを示せ。　[2007]

17　座標空間において，$|x|\leqq z^2$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる立体を R とする。点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り，x 軸と平行な直線を l とする。l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし, R と C の共通部分を T とする。

(1)　$-1<h<1$ を満たす定数 h に対して，点 $(0,\ 0,\ 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。

(2)　T の体積を求めよ。　[2006]

18　曲線 $C: y=\sin x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。C 上の点 P における C の法線を l とする。

(1)　法線 l が点 $\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通るような点 P がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　(1)の条件を満たす点 P に対し，直線 l, 曲線 C, 直線 $y=1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，直線 l, 曲線 C, x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を比較せよ。　[2005]

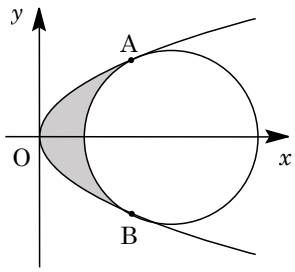
19　$f(x)$ は $x \geqq 0$ で連続で，$f(0)=0$ かつ $x>0$ において $f'(x)>0$ を満たすとする。$t>0$ に対して，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=t$ とで囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $X(t)$，曲線 $y=f(x)$ と y 軸および直線 $y=f(t)$ とで囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $Y(t)$ とする。また，$X(0)=Y(0)=0$ とする。このとき，次を示せ。

(1)　$X'(t)=\pi f(t)^2$，$Y'(t)=\pi t^2 f'(t)$ $(t>0)$ である。

(2)　$f(x)$ が整式でかつ，すべての $t \geqq 0$ に対して $X(t)=Y(t)$ が成り立つならば，$f(x)=x$ $(x \geqq 0)$ である。

(3)　$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ ならば，$X(t)=Y(t)$ $(t \geqq 0)$ である。　[2004]

20　右の図のように，円 $(x-a)^2+y^2=r^2$ $\left(r>\dfrac{1}{2}\right)$ が放物線 $y^2=x$ と 2 点 A, B で接している。



(1)　点 A の x 座標および a を r で表せ。

(2)　円と放物線で囲まれた部分(網点部分)を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(r)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{r \to \frac{1}{2}+0} \frac{V(r)}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^3}$ を求めよ。　[2003]

21　曲線 C を次の方程式で定める。　$y=\sqrt{x^2+4}$ $(x \geqq 0)$

C 上の点 P を通る傾き -1 の直線が x 軸と交わる点の x 座標を $2t$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

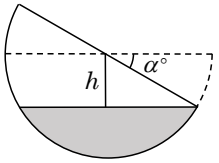
(1)　点 P の x 座標, y 座標を t で表せ。

(2)　点 P が C 上を動いたときの t の最小値を求めよ。

(3)　原点を O とし，線分 OP，曲線 C, y 軸で囲まれる図形の面積 S を t で表せ。

[2002]

22　水を満たした半径 2 の半球形の容器がある。これを静かに $\alpha°$ 傾けたとき，水面が h だけ下がり，こぼれ出た水の量と容器に残った水の量の比が $11:5$ となった。h と α を求めよ。　[1999]



分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$t=\sin\theta+\cos\theta$ とし，θ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ と $\cos 4\theta$ を，それぞれ t を用いて表せ。

(3)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\cos 4\theta$ であるとき，t の値をすべて求めよ。　[2021]

解答例

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ に対して，θ が $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，

$-\dfrac{\pi}{4}<\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ となるので，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1,\ -1<t\leqq\sqrt{2}$$

(2)　$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$ より，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2}$ となり，

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}t(3-t^2)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

$$\cos 4\theta=1-2\sin^2 2\theta=1-2(2\sin\theta\cos\theta)^2=1-8(\sin\theta\cos\theta)^2$$

$$=1-8\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2=1-2(t^2-1)^2=-2t^4+4t^2-1$$

(3)　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\cos 4\theta$ より，(2)から $-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t=-2t^4+4t^2-1$ となり，

$$4t^4-t^3-8t^2+3t+2=0,\ (t-1)^2(4t^2+7t+2)=0$$

(1)から $-1<t\leqq\sqrt{2}$ なので，$t=1,\ \dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}$ である。

コメント

誘導が非常に細かな三角方程式の基本題です。

問　題

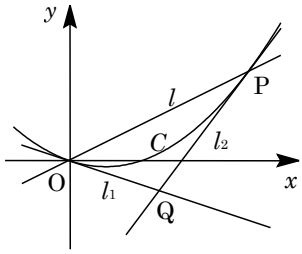
$k>0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。放物線 $C: y=x^2-kx$ と直線 $l: y=(\tan\theta)x$ の交点のうち，原点 O と異なるものを P とする。放物線 C の点 O における接線を l_1 とし，点 P における接線を l_2 とする。直線 l_1 の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ で，直線 l_2 の傾きが $\tan 2\theta$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　k を求めよ。

(2)　$\tan\theta$ を求めよ。

(3)　直線 l_1 と l_2 の交点を Q とする。$\angle \mathrm{PQO}=\alpha$（ただし $0\leqq\alpha\leqq\pi$）とするとき，$\tan\alpha$ を求めよ。　[2019]

解答例



(1)　放物線 $C: y=x^2-kx$ に対して，$y'=2x-k$

C の点 O における接線 l_1 の傾きが $-\dfrac{1}{3}$ より $-k=-\dfrac{1}{3}$ となり，$k=\dfrac{1}{3}$ である。この値は $k>0$ を満たしている。

(2)　(1)より，$C: y=x^2-\dfrac{1}{3}x$ で，$y'=2x-\dfrac{1}{3}$

ここで，直線 $l: y=(\tan\theta)x$ と連立すると，

$$x^2-\frac{1}{3}x=(\tan\theta)x,\ x\left(x-\frac{1}{3}-\tan\theta\right)=0$$

これより，O と異なる交点 P の x 座標は，$x=\dfrac{1}{3}+\tan\theta$ となる。

すると，点 P における接線 l_2 の傾きが $\tan 2\theta$ から，

$$2\left(\frac{1}{3}+\tan\theta\right)-\frac{1}{3}=\tan 2\theta,\ \frac{1}{3}+2\tan\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

そして，$(1+6\tan\theta)(1-\tan^2\theta)=6\tan\theta$ から，$6\tan^3\theta+\tan^2\theta-1=0$ となり，

$$(2\tan\theta-1)(3\tan^2\theta+2\tan\theta+1)=0$$

これより $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ である。この値は $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ $(0<\tan\theta<1)$ を満たしている。

(3)　x 軸の正の向きと，l_1，l_2 のなす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とおくと，$(*)$より，

$$\tan\theta_1=-\frac{1}{3},\ \tan\theta_2=\tan 2\theta=\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

ここで，l_1 と l_2 の交点 Q に対し，$\angle \mathrm{PQO}=\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とすると，$\alpha=\theta_1-\theta_2$

$$\tan\alpha=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}}=-3$$

コメント

放物線の接線を題材とし，三角関数を用いて 2 直線のなす角の処理を問う問題です。

問　題

$f(x)$，$g(t)$ を，$f(x)=x^3-x^2-2x+1$，$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$ とおく。

(1)　$2g(t)-1=f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，$2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。　[2013]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-x^2-2x+1$，$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$ に対し，

$$\begin{aligned}2g(t)-1&=2\cos 3t-2\cos 2t+2\cos t-1\\&=2(4\cos^3 t-3\cos t)-2(2\cos^2 t-1)+2\cos t-1\\&=8\cos^3 t-4\cos^2 t-4\cos t+1=f(2\cos t)\end{aligned}$$

(2)　$h(\theta)=2g(\theta)(\cos\theta+1)$ とおくと，

$$\begin{aligned}h(\theta)&=2(\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)(\cos\theta+1)\\&=2(\cos 3\theta\cos\theta-\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)\\&=\cos 4\theta+\cos 2\theta-\cos 3\theta-\cos\theta+1+\cos 2\theta+2(\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)\\&=\cos 4\theta+\cos 3\theta+\cos\theta+1\end{aligned}$$

ここで，$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，

$$\cos 4\theta+\cos 3\theta=\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi=-\cos\frac{3}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi=0$$

よって，$h(\theta)=\cos\theta+1$ となり，$2g(\theta)\cos\theta+2g(\theta)=\cos\theta+1$ から，

$$2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$$

(3)　(2)より，$2g(\theta)(\cos\theta+1)=\cos\theta+1$ であり，$\cos\theta+1\neq 0$ より $2g(\theta)=1$

すると，(1)より $f(2\cos\theta)=0$ となり，$2\cos\theta=2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は $f(x)=0$ の解である。

コメント

三角関数の計算はやや難しいものの，誘導に従えば，(3)の結論へとスムーズにつながります。

問　題

x の方程式 $|\log_{10} x| = px + q$ （p, q は実数）が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする。

(Ⅰ)　3 つの解の比は，1 : 2 : 3 である。

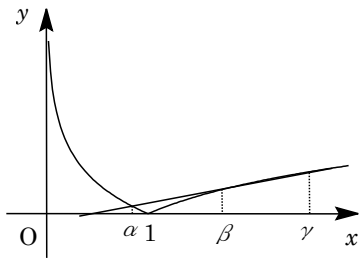
(Ⅱ)　3 つの解のうち最小のものは，$\frac{1}{2}$ より大きく，1 より小さい。

このとき，$A = \log_{10} 2$，$B = \log_{10} 3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ。

[2012]

解答例

$|\log_{10} x| = px + q$ の解を $x = \alpha$, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ とおくと，条件より，



$$\beta = 2\alpha\,,\ \gamma = 3\alpha$$

また，$\frac{1}{2} < \alpha < 1$ より，$1 < \beta < 2$，$\frac{3}{2} < \gamma < 3$ となり，

$$-\log_{10} \alpha = p\alpha + q \cdots\cdots ①$$

$$\log_{10} \beta = p\beta + q\,,\ \log_{10} 2\alpha = 2p\alpha + q \cdots\cdots ②$$

$$\log_{10} \gamma = p\gamma + q\,,\ \log_{10} 3\alpha = 3p\alpha + q \cdots\cdots ③$$

①②より，$\log_{10} 2\alpha + \log_{10} \alpha = p\alpha$，$\log_{10} 2 + 2\log_{10} \alpha = p\alpha \cdots\cdots\cdots ④$

①③より，$\log_{10} 3\alpha + \log_{10} \alpha = 2p\alpha$，$\log_{10} 3 + 2\log_{10} \alpha = 2p\alpha \cdots\cdots\cdots ⑤$

④⑤より，$2\log_{10} 2 - \log_{10} 3 + 2\log_{10} \alpha = 0$ から，$\log_{10} \alpha = \frac{1}{2}\log_{10} \frac{3}{4} = \log_{10} \frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となり，④に代入すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2} p = \log_{10} 2 + \log_{10} \frac{3}{4} = \log_{10} \frac{3}{2} = B - A\,,\ \ p = \frac{2}{\sqrt{3}}(B - A)$$

さらに，①に代入すると，

$$q = -\log_{10} \frac{\sqrt{3}}{2} - (B - A) = -\frac{1}{2}B + A - B + A = 2A - \frac{3}{2}B$$

コメント

簡明な設定のうまくまとまった問題です。ただ，A, B という置き換えのため，同値な答が，複数，出現するような気がします。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　等式$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$を示せ。

(2)　$2\cos 80°$は3次方程式$x^3 - 3x + 1 = 0$の解であることを示せ。

(3)　$x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80°)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$となる角度$\alpha$，$\beta$を求めよ。ただし$0° < \alpha < \beta < 180°$とする。　[2009]

解答例

(1)　$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(2)　$x = 2\cos 80°$とおくと，$\cos 80° = \dfrac{x}{2}$となり，(1)より，

$$\cos 240° = 4\cos^3 80° - 3\cos 80°$$

よって，$-\dfrac{1}{2} = 4\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 - 3\cdot\dfrac{x}{2}$から，$x^3 - 3x + 1 = 0$となる。

(3)　$x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80°)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$より，$x^3 - 3x + 1 = 0$の解を$x = 2\cos\theta$ $(0° < \theta < 180°)$とおくと，(2)より，

$$\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$$

$0° < 3\theta < 540°$から，$3\theta = 120°$，$240°$，$480°$となり，

$$\theta = 40°,\ 80°,\ 160°$$

よって，$0° < \alpha < \beta < 180°$から，$\alpha = 40°$，$\beta = 160°$である。

コメント

3倍角の公式を用いて，3次方程式の解を求める有名問題です。

問　題

p, q を正の実数とする。x の方程式 $\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$ が 1 より大きい解をもつとき，点 $(\log_{10} p,\ \log_{10} q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。　[2008]

解答例

与えられた方程式 $\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$ から，

$$(\log_{10} p+\log_{10} x)(\log_{10} q+\log_{10} x)+1=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\log_{10} x=X$，$\log_{10} p=P$，$\log_{10} q=Q$ とおくと，①より，

$$(P+X)(Q+X)+1=0,\ X^2+(P+Q)X+PQ+1=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，①が $x>1$ の解をもつ条件は，②が $X>0$ の解をもつ条件に対応するので，

(i)　$PQ+1>0$ $(PQ>-1)$ のとき

②が $X>0$ の解をもつ条件は，

$$D=(P+Q)^2-4(PQ+1)\geqq 0 \cdots\cdots ③,\ -(P+Q)>0 \cdots\cdots ④$$

③より，$(P-Q)^2-4\geqq 0$，$(P-Q+2)(P-Q-2)\geqq 0$

④より，$Q<-P$

(ii)　$PQ+1=0$ $(PQ=-1)$ のとき

②の解は $X=0$，$X=-(P+Q)$ となることより，$X>0$ の解をもつ条件は，

$$-(P+Q)>0,\ Q<-P$$

(iii)　$PQ+1<0$ $(PQ<-1)$ のとき

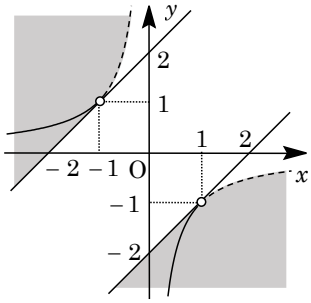
②はつねに $X>0$ の解をもつ。

以上より，点 $(\log_{10} p,\ \log_{10} q)$，すなわち点 $(P,\ Q)$ が満たす条件は，

(i)　$xy>-1$ かつ $(x-y+2)(x-y-2)\geqq 0$ かつ $y<-x$

(ii)　$xy=-1$ かつ $y<-x$

(iii)　$xy<-1$



この領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，実線の境界は領域に含み，破線の境界は領域に含まない。

コメント

対数の絡んだ解の配置の問題です。基本的ですが，慎重な処理が必要です。

問　題

$f(x)=x^4+2x^2-4x+8$ とする。

(1)　$(x^2+t)^2-f(x)=(px+q)^2$ が x の恒等式となるような整数 $t,\ p,\ q$ の値を 1 組求めよ。

(2)　(1)で求めた $t,\ p,\ q$ の値を用いて方程式 $(x^2+t)^2=(px+q)^2$ を解くことにより，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$(x^2+t)^2-f(x)=(px+q)^2$ より，

$$(2t-2)x^2+4x+t^2-8=p^2x^2+2pqx+q^2\cdots\cdots\cdots①$$

①が x の恒等式となることより，

$$2t-2=p^2\cdots\cdots②,\ 4=2pq\cdots\cdots③,\ t^2-8=q^2\cdots\cdots④$$

p, q は整数なので，③より $p=2$，$q=1$ とすると，$t=3$ で②④は満たされる。

よって，①が恒等式となる 1 組の整数値は，$(t,\ p,\ q)=(3,\ 2,\ 1)$

(2)　(1)より，$f(x)=(x^2+3)^2-(2x+1)^2$ なので，方程式 $f(x)=0$ は，

$$(x^2+3)^2-(2x+1)^2=0,\ (x^2+3+2x+1)(x^2+3-2x-1)=0$$

$$(x^2+2x+4)(x^2-2x+2)=0$$

よって，$f(x)=0$ の解は，$x=-1\pm\sqrt{3}i$，$x=1\pm i$ である。

コメント

4 次方程式を誘導つきで解く問題です。(1)では，1 組の解を求めればよいので，すべての場合をチェックしたわけではありません。

問　題

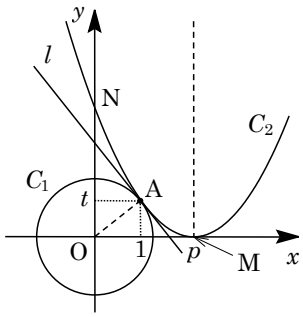
t, p を実数とし，$t>0$ とする。xy 平面において，原点 O を中心とし点 A$(1,\ t)$ を通る円を C_1 とする。また，点 A における C_1 の接線を l とする。直線 $x=p$ を軸とする 2 次関数のグラフ C_2 は，x 軸と接し，点 A において直線 l とも接するとする。

(1)　直線 l の方程式を t を用いて表せ。

(2)　p を t を用いて表せ。

(3)　C_2 と x 軸の接点を M とし，C_2 と y 軸の交点を N とする。t が正の実数全体を動くとき，三角形 OMN の面積の最小値を求めよ。　[2022]

解答例



(1)　$t>0$ のとき，原点 O を中心とし，点 A$(1,\ t)$ を通る円 C_1 の方程式は，$x^2+y^2=1+t^2$ である。

すると，点 A における C_1 の接線 l の方程式は，

$$x+ty=1+t^2,\quad y=-\frac{1}{t}x+t+\frac{1}{t}$$

(2)　直線 $x=p$ を軸とし，x 軸と接する 2 次関数のグラフ C_2 は，$a\neq 0$ として，

$$y=a(x-p)^2,\quad y'=2a(x-p)$$

グラフ C_2 は点 A において直線 l と接することより，

$$t=a(1-p)^2\cdots\cdots\cdots①,\quad -\frac{1}{t}=2a(1-p)\cdots\cdots\cdots②$$

②から $p\neq 1$ なので $a=-\dfrac{1}{2t(1-p)}$ となり，①に代入すると $t=-\dfrac{1}{2t}(1-p)$ から，

$$2t^2=-1+p,\quad p=2t^2+1\cdots\cdots\cdots③$$

(3)　①③より $t=a(1-2t^2-1)^2$ となり，$a=\dfrac{t}{4t^4}=\dfrac{1}{4t^3}$ から $C_2: y=\dfrac{1}{4t^3}(x-2t^2-1)^2$

これより，M$(2t^2+1,\ 0)$，$N\left(0,\ \dfrac{(2t^2+1)^2}{4t^3}\right)$ となり，△OMN の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}(2t^2+1)\cdot\frac{(2t^2+1)^2}{4t^3}=\frac{1}{8}\left(\frac{2t^2+1}{t}\right)^3=\frac{1}{8}\left(2t+\frac{1}{t}\right)^3$$

すると，$2t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{2t\cdot\dfrac{1}{t}}=2\sqrt{2}$ $\left(\text{等号は } 2t=\dfrac{1}{t} \text{ すなわち } t=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ のとき成立}\right)$ より，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{1}{8}(2\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$ をとる。

コメント

円と放物線を題材にした頻出問題です。(3)は微分法を利用することも考えられます。

問　題

xy 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2-2x+y^2+4y-11=0,\ C_2 : x^2-8x+y^2-4y+k=0$$

が外接するとし，その接点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1)　k の値を求めよ。

(2)　P の座標を求めよ。

(3)　円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある。これらの 2 直線の交点 Q の座標を求めよ。　[2021]

解答例

(1)　円 $C_1 : x^2-2x+y^2+4y-11=0$，円 $C_2 : x^2-8x+y^2-4y+k=0$ に対して，

$$C_1 : (x-1)^2+(y+2)^2=16,\ C_2 : (x-4)^2+(y-2)^2=20-k$$

円 C_1 は中心 $\mathrm{A}(1,\ -2)$ で半径 $r_1=4$，円 C_2 は中心 $\mathrm{B}(4,\ 2)$ で半径 $r_2=\sqrt{20-k}$ である。ただし，$20-k>0\ (k<20)$ とする。

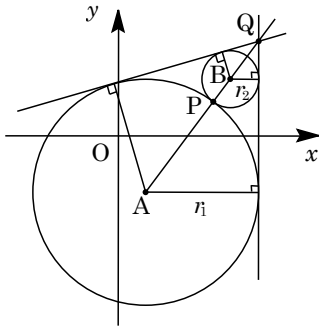
ここで，円 C_1 と円 C_2 が外接することより，$\mathrm{AB}=r_1+r_2$ となり，

$$\sqrt{(4-1)^2+(2+2)^2}=4+\sqrt{20-k},\ \sqrt{20-k}=1$$

これより，$20-k=1$ となり $k=19$ である。なお，この値は $k<20$ を満たす。

(2)　C_1 と C_2 の接点 P は線分 AB を $r_1 : r_2=4:1$ に内分するので，その座標は，

$$\left(\frac{4\cdot4+1\cdot1}{4+1},\ \frac{4\cdot2+1\cdot(-2)}{4+1}\right)=\left(\frac{17}{5},\ \frac{6}{5}\right)$$



(3)　C_1，C_2 の共通外接線の交点 Q は直線 AB 上にあり，線分 AB を $r_1 : r_2=4:1$ に外分するので，その座標は，

$$\left(\frac{4\cdot4-1\cdot1}{4-1},\ \frac{4\cdot2-1\cdot(-2)}{4-1}\right)=\left(5,\ \frac{10}{3}\right)$$

コメント

外接する 2 円を題材にした基本的な問題です。

問　題

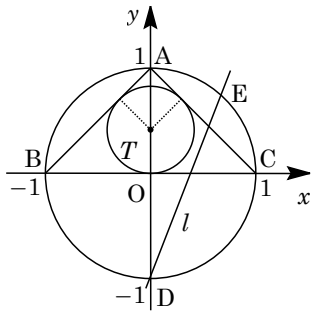
xy 平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする△ABC の内接円を T とする。点 $\mathrm{D}(0,\ -1)$ を通り，傾きが正である直線を $l: y=ax-1$ とする。

(1) 円 T の半径を r とする。r を求めよ。

(2) 直線 l と円 $x^2+y^2=1$ の交点のうち，D と異なる点を E とする。点 E の座標を a を用いて表せ。

(3) 直線 l が円 T に接するとする。このとき，(2)で求めた点 E を通り，x 軸と平行な直線が，円 T に接することを示せ。 [2020]

解答例



(1) 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする△ABC に対して，その内接円 T の半径を r とすると，

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=2$ から，

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}+2)r=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1,\ (\sqrt{2}+1)r=1$$

これより，$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$ となる。

(2) 直線 $l: y=ax-1$ ……①と円 $x^2+y^2=1$ を連立して，

$$x^2+(ax-1)^2=1,\ (a^2+1)x^2-2ax=0$$

$x\neq 0$ の解は $x=\dfrac{2a}{a^2+1}$ となり，①から $y=a\cdot\dfrac{2a}{a^2+1}-1=\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

よって，$\mathrm{E}\left(\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$ となる。

(3) (1)から，二等辺三角形 ABC の内接円 T の中心の座標は $(0,\ \sqrt{2}-1)$，半径は $\sqrt{2}-1$ であり，$l: ax-y-1=0\ (a>0)$ が円 T に接する条件は，

$$\frac{|a\cdot 0-(\sqrt{2}-1)-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)\sqrt{a^2+1}$$

これより，$a^2+1=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^2=(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}$ となり，

$$\frac{a^2-1}{a^2+1}=\frac{4+4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}=\frac{(2+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{9-8}=-2+2\sqrt{2}$$

すると，点 E を通り x 軸と平行な直線の方程式は $y=-2+2\sqrt{2}$ ……②であり，T の中心 $(0,\ \sqrt{2}-1)$ との距離は，$(-2+2\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-1$ となり，T の半径に等しい。よって，直線②は内接円 T に接する。

コメント

円と直線についての基本題です。(1)では面積を利用する方法を採りました。

問　題

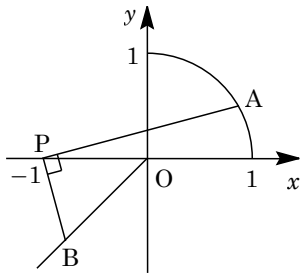
xy 平面において，円 $x^2+y^2=1$ の $x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を C_1 とする。また，直線 $y=x$ の $x \leqq 0$ を満たす部分を C_2 とする。C_1 上の点 A，C_2 上の点 B および点 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$ について，$\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるとする。点 A の座標を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とする。ただし $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　点 B の x 座標を θ を用いて表せ。

(2)　線分 AB の中点の x 座標が 0 以上であるような θ の範囲を求めよ。　[2020]

解答例

(1)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$t \leqq 0$ として，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(t,\ t)$，



$\mathrm{P}(-1,\ 0)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(\cos\theta+1,\ \sin\theta),\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(t+1,\ t)$$

ここで，$\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$ となり，

$$(t+1)(\cos\theta+1)+t\sin\theta=0$$

$$(\sin\theta+\cos\theta+1)t+(\cos\theta+1)=0$$

$\sin\theta+\cos\theta+1>0$ から $t=-\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ となり，この値は $t \leqq 0$ を満たす。

よって，点 B の x 座標は $x=-\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta+1}$ である。

(2)　線分 AB の中点の x 座標が 0 以上より，$\dfrac{1}{2}\left(\cos\theta-\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta+1}\right) \geqq 0$ となり，

$$\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)-(\cos\theta+1) \geqq 0,\ \sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-1 \geqq 0$$

$$\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta \geqq 0,\ \sin\theta(\cos\theta-\sin\theta) \geqq 0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\theta \geqq 0$ となり，

(i)　$\sin\theta=0\ (\theta=0)$ のとき　$(*)$は成立する。

(ii)　$\sin\theta>0\ \left(0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき　$(*)$から $\cos\theta-\sin\theta \geqq 0$

すると，$\cos\theta \geqq \sin\theta$ から $0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ となる。

(i)(ii)より，求める θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である。

コメント

三角関数の図形への応用問題です。基本的な内容ですが，(2)の詰めは要注意です。

問　題

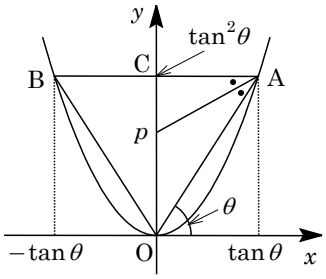
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\tan\theta,\ \tan^2\theta)$，$\mathrm{B}(-\tan\theta,\ \tan^2\theta)$ をとる。三角形 OAB の内心の y 座標を p とし，外心の y 座標を q とする。また，正の実数 a に対して，直線 $y=a$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ で表す。

(1) $p,\ q$ を $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) $\dfrac{S(p)}{S(q)}$ が整数であるような $\cos\theta$ の値をすべて求めよ。 [2018]

解答例

(1) まず，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\tan\theta,\ \tan^2\theta)$，$\mathrm{B}(-\tan\theta,\ \tan^2\theta)$ に対し，線分 AB と y 軸との交点を C とおく。



さて，二等辺三角形 OAB の内心は，y 軸と $\angle\mathrm{OAB}$ の二等分線の交点であり，その y 座標を p とする。

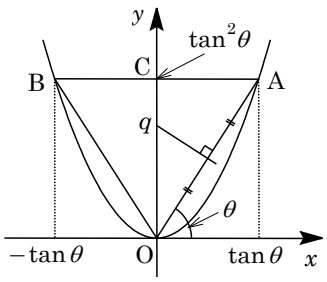
ここで，直線 OA の傾きは $\tan\theta$ なので，OA と x 軸の正の向きとのなす角は θ である。これより，$\angle\mathrm{OAB}=\theta$ となるので，

$$p=\mathrm{OC}-\mathrm{AC}\tan\frac{\theta}{2}=\tan^2\theta-\tan\theta\tan\frac{\theta}{2}=\tan\theta\left(\tan\theta-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)$$

$$=\tan\theta\left(\tan\theta-\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}\right)=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

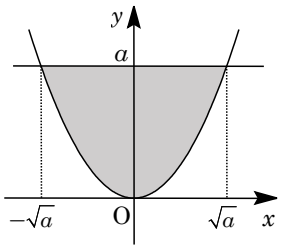
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\cos^2\theta}$$

また，二等辺三角形 OAB の外心は，y 軸と線分 OA の垂直二等分線の交点であり，その y 座標を q とすると，$\mathrm{OA}=\sqrt{\tan^2\theta+\tan^4\theta}=\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}=\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}$ で，$\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ から，



$$q=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\frac{1}{\cos\angle\mathrm{AOC}}=\frac{\tan\theta}{2\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{2\cos^2\theta}$$

(2) まず，直線 $y=a\ (a>0)$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，y 軸に関する対称性から，



$$S(a)=2\left\{a\sqrt{a}-\int_0^{\sqrt{a}}x^2dx\right\}=2a\sqrt{a}-\frac{2}{3}a\sqrt{a}$$

$$=\frac{4}{3}a\sqrt{a}=\frac{4}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

(1)より，$S(p)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{\cos^3\theta}$，$S(q)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}\cos^3\theta}$ となり，

$$\frac{S(p)}{S(q)}=2\sqrt{2}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}=\{2(1-\cos\theta)\}^{\frac{3}{2}}$$

条件から，$\{2(1-\cos\theta)\}^{\frac{3}{2}}=k$　(k は自然数)と表せ，

$$8(1-\cos\theta)^3=k^2\cdots\cdots(*)$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $0<\cos\theta<1$ となり，$0<8(1-\cos\theta)^3<8$ なので，$(*)$を満たす k は，$k=1,\ 2$ である。

(i)　$k=1$ のとき　$8(1-\cos\theta)^3=1$ より $1-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となり，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$k=2$ のとき　$8(1-\cos\theta)^3=4$ より $1-\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ となり，$\cos\theta=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

コメント

(1)はいろいろな方法が考えられ，解答例では図形的に処理しましたが，それ以外に角の二等分線や辺の垂直二等分線の方程式を立てて計算しても構いません。

問　題

a を正の実数とする。2 つの関数

$$y=\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3,\ \ y=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

のグラフは，2 点 A, B で交わる。ただし, A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。また, 2 点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を l とする。

(1)　2 点 A, B の座標を a を用いて表せ。

(2)　直線 l の方程式を a を用いて表せ。

(3)　原点と直線 l の距離 d を a を用いて表せ。また，$a>0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$a>0$ のとき，$y=\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3$，$y=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$ を連立すると，

$$\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

$$ax^2-4a^2x+3a^3=0,\ \ a(x-a)(x-3a)=0$$

よって，$x=a,\ 3a$ より，$\mathrm{A}\left(a,\ \frac{2}{3}a^3\right)$，$\mathrm{B}\left(3a,\ -\frac{2}{3}a^3\right)$ である。

(2)　線分 AB の垂直二等分線 l 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ から，

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{2}{3}a^3\right)^2=(x-3a)^2+\left(y+\frac{2}{3}a^3\right)^2$$

$$-2ax+a^2-\frac{4}{3}a^3y=-6ax+9a^2+\frac{4}{3}a^3y$$

よって，$4ax-\frac{8}{3}a^3y-8a^2=0$ より，$l:3x-2a^2y-6a=0$ となる。

(3)　原点と直線 l の距離 d は，$d=\frac{|-6a|}{\sqrt{9+4a^4}}=\frac{6a}{\sqrt{9+4a^4}}$

ここで, d を最大とする $a>0$ を求めるために，$d=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{a^2}+4a^2}}$ と変形すると，

$$\frac{9}{a^2}+4a^2\geqq 2\sqrt{\frac{9}{a^2}\cdot 4a^2}=12$$

等号は $\frac{9}{a^2}=4a^2\left(a=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のときに成立する。

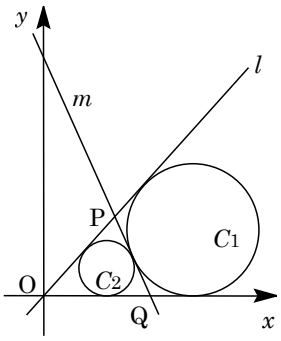
よって, d を最大にする a の値は，$a=\frac{\sqrt{6}}{2}$ である。

コメント

放物線と直線に関する基本的な問題です。

問　題

xy 平面の直線 $y=(\tan 2\theta)x$ を l とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 C_1，C_2 を以下の(i)～(iv)で定める。



(i)　円 C_1 は直線 l および x 軸の正の部分と接する。

(ii)　円 C_1 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。

(iii) 円 C_2 は直線 l，x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する。

(iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1>d_2$ を満たす。

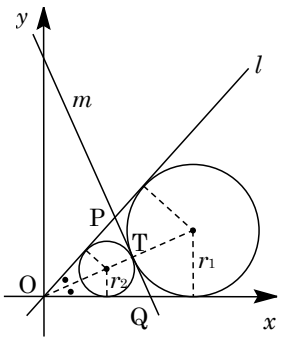
円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，x 軸，直線 l と異なる直線を m とし，直線 m と直線 l，x 軸との交点をそれぞれ P, Q とする。

(1)　円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

(3)　(2)の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。　[2016]

解答例



(1)　円 C_1，C_2 の半径を，それぞれ r_1，r_2 とする。

すると，$d_1=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ から，

$$r_1=d_1\sin\theta=2\sin^2\theta\cos\theta$$

また，$r_2=d_2\sin\theta$，$d_1-d_2=r_1+r_2$ から，

$$2\sin\theta\cos\theta-d_2=2\sin^2\theta\cos\theta+d_2\sin\theta$$

$$(1+\sin\theta)d_2=2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)$$

よって，$d_2=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ となり，

$$r_2=\frac{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

(2)　円 C_1 と C_2 の接点を T とおくと，$\mathrm{OT}\perp\mathrm{PQ}$ から，

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{OT}\tan\theta=2(d_1-r_1)\tan\theta=2(2\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\tan\theta$$

$$=4\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\tan\theta=4\sin^2\theta(1-\sin\theta)$$

ここで，$t=\sin\theta$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ から $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$\mathrm{PQ}=f(t)$ として，

$$f(t)=4t^2(1-t)=4t^2-4t^3$$
$$f'(t)=8t-12t^2=4t(2-3t)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，PQ の最大値は $f\left(\frac{2}{3}\right)=4\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{27}$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

(3)　(2)から，$\sin\theta=\frac{2}{3}$ より $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ となり，このとき直線 m の傾きは，

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

また，$\mathrm{PQ}=\frac{16}{27}$ から $\mathrm{TQ}=\frac{8}{27}$ となり，$\mathrm{OQ}=\frac{\mathrm{TQ}}{\sin\theta}=\frac{8}{27}\cdot\frac{3}{2}=\frac{4}{9}$ から点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(\frac{4}{9},\ 0\right)$ である。すると，直線 m の方程式は，

$$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x-\frac{4}{9}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{2}{9}\sqrt{5}$$

コメント

円と接線の関係をもとに，微分を利用して最大・最小へと繋ぐ問題です。問題文に参考図が書かれているため，解きやすくなっています。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　座標平面において，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x^2+y\leqq 1,\ x-y\leqq 1$$

(2)　2 つの放物線 $y=x^2-2x+k$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　$x,\ y$ が(1)の連立不等式を満たすとき，$y-x^2+2x$ の最大値および最小値と，それらを与える x, y の値を求めよ。　[2015]

解答例

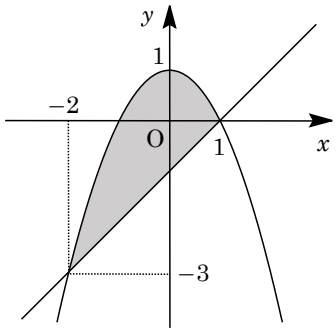
(1)　領域 $D: x^2+y\leqq 1,\ x-y\leqq 1$ の境界線は，

$$x^2+y=1\cdots\cdots\cdots①,\ x-y=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$x^2+x-2=0$ より，

$$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (-2,\ -3)$$

よって，領域 D は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。



(2)　$y=x^2-2x+k\cdots\cdots$③と①を連立すると，

$$x^2-2x+k=-x^2+1,\ 2x^2-2x+k-1=0\cdots\cdots\cdots④$$

共有点をもつことより，$D/4=1-2(k-1)\geqq 0$ となり，$k\leqq\dfrac{3}{2}$ である。

(3)　まず，$y-x^2+2x=k$ とおくと，③と一致する。

そして，③を $y=(x-1)^2+k-1$ と変形すると，軸が $x=1$ の放物線となり，以下，この放物線が領域 D と共有点をもつ k の値の範囲を求める。

すると，k の値の最大値は，(2)から $k=\dfrac{3}{2}$ である。このとき，④より $x=\dfrac{1}{2}$，①より $y=\dfrac{3}{4}$ である。また，k の値が最小となるのは，③が点 $(-2,\ -3)$ を通るときで，このとき $k=-11$ となる。

以上より，$y-x^2+2x$ の最大値は $\dfrac{3}{2}\left(x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{4}\right)$ であり，最小値は $-11\ (x=-2,\ y=-3)$ となる。

コメント

領域と最大・最小についての基本問題です。細かすぎるほどの誘導がついています。

問　題

$f(x)=x^3-x$ とする。$y=f(x)$ のグラフに点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた接線は 3 本あるとする。3 つの接点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする。

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を a, b を用いて表せ。

(2)　点 G の座標を a, b を用いて表せ。

(3)　点 G の x 座標が正で，y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ。　[2014]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-x$ に対し，$f'(x)=3x^2-1$ となり，点 $(t,\ t^3-t)$ における接線は，

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t),\quad y=(3t^2-1)x-2t^3$$

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通ることより，$b=(3t^2-1)a-2t^3$，$2t^3-3at^2+a+b=0$ ……①

ここで，$g(t)=2t^3-3at^2+a+b$ とおくと，$g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$ となり，

条件より，t についての 3 次方程式①が，異なる 3 実数解をもつことから，

$$a\neq 0,\quad g(0)\cdot g(a)=(a+b)(-a^3+a+b)<0 \text{ ……②}$$

②のもとで，①の 3 つの実数解が $t=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ なので，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}a,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{a+b}{2}$$

(2)　△ABC の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ とおくと，(1)より，$x=\dfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{1}{2}a$ ……③

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{3}(\alpha^3-\alpha+\beta^3-\beta+\gamma^3-\gamma)\\&=\frac{1}{3}\{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)\}\\&=\frac{1}{3}\left\{\frac{3}{2}a\left(\frac{9}{4}a^2-3\cdot 0\right)-3\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{3}{2}a\right\}=\frac{9}{8}a^3-a-\frac{1}{2}b \text{ ……④}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{G}\left(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{9}{8}a^3-a-\dfrac{1}{2}b\right)$ となる。

(3)　条件から，③④について，$\dfrac{1}{2}a>0$ かつ $\dfrac{9}{8}a^3-a-\dfrac{1}{2}b<0$ となり，

$$a>0 \text{ ……⑤},\quad b>\frac{9}{4}a^3-2a \text{ ……⑥}$$

そこで，②⑤⑥の共通部分を求めるために，$a+b=0$ と $b=\dfrac{9}{4}a^3-2a$ を連立して，

$$-a=\frac{9}{4}a^3-2a,\quad 9a^3-4a=0$$

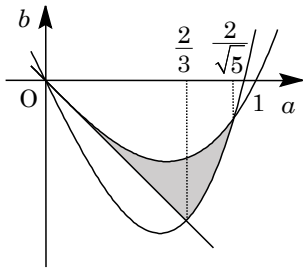
$a>0$ より，$a=\dfrac{2}{3}$ となる。

また，$-a^3+a+b=0$ と $b=\dfrac{9}{4}a^3-2a$ を連立し，

$$a^3-a=\frac{9}{4}a^3-2a,\ 5a^3-4a=0$$

$a>0$ より，$a=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となる。

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。



コメント

領域の図示をテーマとした標準的な問題です。ただ，記述量は非常に多いため，上の解答例では，3 次曲線の概形については省いています。