２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

大阪大学

理系数学 25か年

１９９９ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策

大 阪 大 学

理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1999 年度以降に出題された大阪大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1, 2,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　次

分野別問題一覧 …… 3

分野別問題と解答例 …… 37

関　数 …… 38

図形と式 …… 43

図形と計量 …… 57

ベクトル …… 65

整数と数列 …… 77

確　率 …… 99

論　証 …… 120

複素数 …… 129

曲　線 …… 143

極　限 …… 151

微分法 …… 166

積分法 …… 188

積分の応用 …… 195

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　$\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\cos 4\alpha=\cos 3\alpha$ であることを示せ。

(2)　$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とするとき，$f(\cos\alpha)=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\cos\alpha$ は無理数であることを示せ。　[2022]

2　a, b を正の実数とし，$f(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$ とする。

(1)　c を実数とし，$f(x)$ が $x-c$ で割り切れるとする。このとき，$c>0$ であり，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れることを示せ。

(2)　$f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるとき，$a\geqq 4$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a=5$ とする。$f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ。　[2018]

3　α を 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解とするとき，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，必要ならば，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい。　[2009]

4　実数を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が異なる 3 つの実数解をもつとする。このとき，$a>0,\ b>0$ ならば，少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ。　[2002]

■ 図形と式

1　正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える。t が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ。

[2022]

2　実数 s, t が $s^2+t^2 \leqq 6$ を満たしながら変わるとき, xy 平面上で点 $(s+t,\ st)$ が動く領域を A とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$(2,\ \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ。

(2)　A を図示せよ。

(3)　A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2019]

3　$b,\ c$ を実数とする。2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が, $0 \leqq f(1) \leqq 2$, $5 \leqq f(3) \leqq 6$ を満たすとする。

(1)　$f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき, 放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2017]

4　不等式 $1 \leqq \left|\,|x|-2\,\right|+\left|\,|y|-2\,\right| \leqq 3$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。　[2013]

5　実数の組 $(p,\ q)$ に対し, $f(x)=(x-p)^2+q$ とおく。

(1)　放物線 $y=f(x)$ が点 $(0,\ 1)$ を通り, しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組 $(p,\ q)$ と接点の座標を求めよ。

(2)　実数の組 $(p_1,\ q_1)$, $(p_2,\ q_2)$ に対して, $f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく。実数 α, β（ただし $\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば, 区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ。

(3)　長方形 $R: 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$ を考える。また, 4 点 $\mathrm{P}_0(0,\ 1)$, $\mathrm{P}_1(0,\ 0)$, $\mathrm{P}_2(1,\ 1)$, $\mathrm{P}_3(1,\ 0)$ をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組 $(p,\ q)$ を, 放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L が共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき, R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする。R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し, その面積を求めよ。　[2011]

6　θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x = t\cos\theta,\ \ y = 1 - t^2 + t\sin\theta$$

で与えられるような動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える。t が実数全体を動くとき，点 P が描く曲線を C とする。C が x 軸の $x \geqq 0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき, Q の x 座標を求めよ。

(2)　θ が変化すると曲線 C も変化する。θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき，C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3)　θ が変化すると点 Q も変化する。Q の x 座標が最大となるような θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ。　[2005]

7　座標平面上に直線 $l : x\sin\theta + y\cos\theta = 1\ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ がある。不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x\sin\theta + y\cos\theta \geqq 1$ が表す領域を D, 不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x\sin\theta + y\cos\theta \leqq 1$ が表す領域を D' とする。

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1，C_2 を，C_1 は l と y 軸に接し，C_2 は l と x 軸に接し，さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる。また D' 内に半径 r の 2 つの円 C_1'，C_2' を，C_1' は l と y 軸に接し，C_2' は l と x 軸に接し，さらに C_1' と C_2' が外接するようにとる。

(1)　$\dfrac{r}{R}$ を θ で表せ。

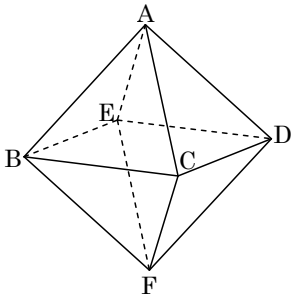
(2)　θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2004]

8　$a > b > 0$ とする。円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 $\left(b,\ \sqrt{a^2 - b^2}\right)$ における接線と x 軸との交点を P とする。また, 円の外部の点 $(b,\ c)$ からこの円に 2 本の接線を引き, 接点を Q, R とする。このとき, 2 点 Q, R を通る直線は P を通ることを示せ。　[2000]

■ 図形と計量

1　n を 2 以上の自然数とする。三角形 ABC において, 辺 AB の長さを c, 辺 CA の長さを b で表す。$\angle\mathrm{ACB} = n\angle\mathrm{ABC}$ であるとき，$c < nb$ を示せ。　[2020]

2 座標空間に 6 点 A(0, 0, 1)，B(1, 0, 0)，C(0, 1, 0)，D(−1, 0, 0)，E(0, −1, 0)，F(0, 0, −1) を頂点とする正八面体 ABCDEF がある。s, t を $0<s<1$, $0<t<1$ を満たす実数とする。線分 AB, AC をそれぞれ $1-s:s$ に内分する点を P, Q とし，線分 FD, FE をそれぞれ $1-t:t$ に内分する点を R, S とする。



(1) 4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあることを示せ。

(2) 線分 PQ の中点を L とし，線分 RS の中点を M とする。s, t が $0<s<1$, $0<t<1$ の範囲を動くとき，線分 LM の長さの最小値 m を求めよ。

(3) 正八面体 ABCDEF の 4 点 P, Q, R, S を通る平面による切り口の面積を X とする。線分 LM の長さが(2)の値 m をとるとき，X を最大とするような s, t の値と，そのときの X の値を求めよ。 [2018]

3 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に，それぞれ点 P, Q, R, S を，$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{QPC}$，$\angle\mathrm{PQC}=\angle\mathrm{RQD}$，$\angle\mathrm{QRD}=\angle\mathrm{SRA}$ となるようにとる。ただし，点 P, Q, R, S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。$f(t)$ の最大値を求めよ。 [2006]

4 立方体 X と球 Y があって，両者の体積は等しいとする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，円周率は $\pi=3.14\cdots\cdots$ である。

(1) 立方体 X と球 Y を動かして，立方体 X のなるべく多くの頂点が球 Y の内部に含まれるようにしたい。最大何個の頂点が含まれるようにできるか。

(2) 立方体 X と球 Y を動かして，立方体 X のなるべく多くの辺が球 Y の内部と共通の点をもつようにしたい。最大何個の辺が共通の点をもつようにできるか。

[2000]

5　平面上に，点 O を中心とし点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 を頂点とする正六角形がある。O を通りその平面上にある直線 l を考え，各 A_k と l との距離をそれぞれ d_k とする。このとき

$$D = {d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2 + {d_4}^2 + {d_5}^2 + {d_6}^2$$

は l によらず一定であることを示し，その値を求めよ。ただし，$OA_k = r$ とする。

[1999]

■ ベクトル

1　平面上の 3 点 O, A, B が

$$|2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ かつ } (2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする。

(1)　$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})$ を求めよ。

(2)　平面上の点 P が，$|\overrightarrow{OP}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})| \leqq \frac{1}{3}$ かつ $\overrightarrow{OP}\cdot(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \leqq \frac{1}{3}$ をみたすように動くとき，$|\overrightarrow{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ。　[2023]

2　a，b を $a^2+b^2>1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする。座標空間の点 $A(a,\ 0,\ b)$ と点 $P(x,\ y,\ 0)$ をとる。点 $O(0,\ 0,\ 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし，平面 α と直線 AP との交点を Q とする。

(1)　$(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO})^2 = |\overrightarrow{AP}|^2|\overrightarrow{AQ}|^2$ が成り立つことを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{OQ}|=1$ をみたすように点 $P(x,\ y,\ 0)$ が xy 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ。　[2023]

3　空間内に，同一平面上にない 4 点 O, A, B, C がある。s, t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とする。線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0，線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。さらに，4 点 A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあるとする。

(1)　t を s を用いて表せ。

(2)　$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\angle AOB=120^\circ$，$\angle BOC=90^\circ$，$\angle COA=60^\circ$，$\angle POQ=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ。　[2021]

4　座標空間内の 2 つの球面

$$S_1 : (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7 \text{ と } S_2 : (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2)　S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。　[2019]

5　実数 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ に対して，座標平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(c,\ d)$，$\mathrm{C}(e,\ 0)$ をとる。ただし点 A と点 B はどちらも原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とは異なる点とする。このとき，実数 $s,\ t$ で，$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすものが存在するための，$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ についての必要十分条件を求めよ。　[2014]

6　平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。　[2009]

7　点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2)　点 A，B と C，D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。　[2008]

8　xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。　[2007]

9　三角形 OAB の辺 OA, OB 上に，それぞれ点 P, Q をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0<a<1,\ 0<b<1)$$

とする。三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。また，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。ただし，三角形 OPQ の辺上の点は，三角形 OPQ の内部に含まれないと考える。　[2006]

10　空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=2,\ \mathrm{AD}=3,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ,\ \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$$

を満たしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。

[2005]

■ 整数と数列

1　整数 a, b, c に関する次の条件(＊)を考える。

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx=\int_b^c (x^2+ax)\,dx \cdots\cdots\cdots(*)$$

(1)　整数 a, b, c が(＊)および $a\neq b$ を満たすとき，c は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　$c=3600$ のとき，(＊)および $a<b$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ。

[2021]

2　$a,\ b$ を自然数とし，不等式(A) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$ を考える。次の問いに答えよ。ただし，$2.645<\sqrt{7}<2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1)　不等式(A)を満たし $b\geqq 2$ である自然数 $a,\ b$ に対して，$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$ であることを示せ。

(2)　不等式(A)を満たす自然数 a, b の組のうち，$b\geqq 2$ であるものをすべて求めよ。

[2017]

3　正の整数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする。

(1)　$\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ。

(2)　$S_n=2+\dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 $(n,\ m)$ をすべて求めよ。

(3)　整数 a と $0\leqq b<1$ を満たす実数 b を用いて，$A_{20}S_{20}=a+b$ と表すとき，b の値を求めよ。　[2016]

4　4 個の整数　$n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7　がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。　[2013]

5　次の 2 つの条件(i), (ii)を満たす自然数 n について考える。

(i)　n は素数ではない。

(ii)　l, m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず $|l-m|\leqq 2$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n が偶数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(2)　n が 7 の倍数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(3)　$2\leqq n\leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。　[2012]

6　5 次式 $f(x)=x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ （$p,\ q,\ r,\ s,\ t$ は実数）について考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　数列 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ が等差数列であることと，

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m \quad (l,\ m \text{ は実数})$$

と書けることは互いに同値であることを示せ。

(2)　$f(x)$ は(1)の条件を満たすものとする。α を実数，k を 3 以上の自然数とする。k 項からなる数列

$$f(\alpha),\ f(\alpha+1),\ f(\alpha+2),\ \cdots,\ f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α , k の組をすべて求めよ。　[2012]

7　$l,\ m,\ n$ を 3 以上の整数とする。等式 $\left(\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\right)l=2$ を満たす $l,\ m,\ n$ の組をすべて求めよ。　[2010]

8　x, y を変数とする。

(1)　n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 a, b を定めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)}=\frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2)　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\,\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

[2006]

9　正の整数 n に対して，

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p},\quad T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

とおく。等式 $S(n)=T(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ。　[2005]

10　素数 $p,\ q$ に対して，$a_n=p^n-4(-q)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって整数 a_n を定める。ただし，$p>2q$ とする。

(1)　a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば，$m=3$ であることを示せ。

(2)　a_n がすべて 3 の倍数であるような $p,\ q$ のうちで積 pq が最小となるものを求めよ。　[2004]

11　実数 a, r に対し数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a,\ x_{n+1} = rx_n(1-x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。

(1)　すべての n について $x_n = a$ となるような a を求めよ。

(2)　$x_2 \neq a$，$x_3 = a$ となるような a の個数を求めよ。

(3)　$0 \leqq a \leqq 1$ となるすべての a について $0 \leqq x_n \leqq 1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が成り立つような r の範囲を求めよ。　[2004]

12　数列 $\{a_k\}$ が $a_k < a_{k+1}\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$ および

$$a_{kl} = a_k + a_l\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ l=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする。

(1)　$k,\ l$ を 2 以上の自然数とする。自然数 n が与えられたとき，$l^{m-1} \leqq k^n < l^m$ を満たす自然数 m が存在することを示せ。

(2)　$k,\ l$ を 2 以上の自然数とするとき，$-\dfrac{1}{n} < \dfrac{a_k}{a_l} - \dfrac{\log k}{\log l} < \dfrac{1}{n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a_2 = a$ とするとき，数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ。　[2003]

13　数列 $\{a_n\}$ において，各項 a_n が $a_n \geqq 0$ をみたし，かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ が成り立つとする。さらに各 n に対し

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n),\quad c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

とおく。

(1)　すべての n に対し不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

(2)　ある n について $b_{n+1} = c_{n+1}$ が成り立てば，$b_n = c_n$ となることを示せ。

(3)　$b_3 = \dfrac{1}{2}$ となるとき，$c_3 = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ。また $b_3 = \dfrac{1}{2}$ となる数列 $\{a_n\}$ は全部で何種類あるかを求めよ。　[2001]

14　どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても，$x = 3m + 5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。　[2000]

■ 確率

1　1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする。b_n を $b_n=\sum_{k=1}^{n} a_1^{n-k}a_k$ により定義し，b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。　[2023]

2　1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k=1$，出た目が 2 の場合は $X_k=-1$，その他の目が出た場合は $X_k=0$ とする。

$Y_k=\cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$ とおき，Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ を Z_n で表す。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　Z_2 が実数でない確率を求めよ。

(2)　Z_1，Z_2，Z_3，…，Z_n がいずれも実数でない確率を求めよ。

(3)　Z_n が実数となる確率を p_n とする。p_n を n を用いて表し，極限 $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

[2020]

3　p, q を $0<p<1$，$0<q<1$ を満たす実数とし，n を 2 以上の整数とする。2 つのチーム A, B が野球の試合を n 回行う。1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする。また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする。なお，試合結果に引き分けはなく，勝敗が決まるとする。

(1)　n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2)　$n\geqq 3$ とする。B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。　[2018]

4　1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める。

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

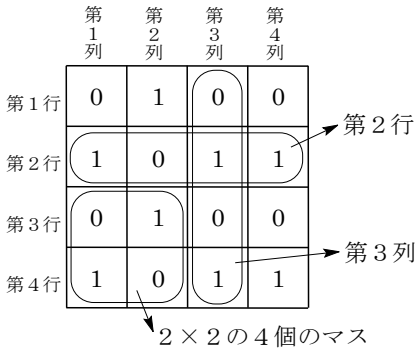
(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2)　$a=1$，$b=6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ。

(3)　1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。　[2016]

5　n を 2 以上の整数とする。正方形の形に並んだ $n\times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる。マスは上から第 1 行，第 2 行，…，左から第 1 列，第 2 列…と数える。数字の入れ方についての次の条件 p を考える。

条件 p：1 から $n-1$ までのどの整数 i, j についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る。



（$n=4$ の場合の入れ方の例）

(1)　条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ。

(2)　条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ。　[2015]

6　さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とする。

(1)　p_n+q_n を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3)　$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。　[2014]

7　n を 3 以上の整数とする。n 個の球 K_1，K_2，…，K_n と n 個の空の箱 H_1，H_2，…，H_n がある。以下のように，K_1，K_2，…，K_n の順番に，球を箱に 1 つずつ入れていく。

まず，球 K_1 を箱 H_1，H_2，…，H_n のどれか 1 つに無作為に入れる。次に，球 K_2 を，箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ，箱 H_2 が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

一般に，$i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について，球 K_i を箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ，箱 H_i が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

(1)　K_n が入る箱は H_1 または H_n である。これを証明せよ。

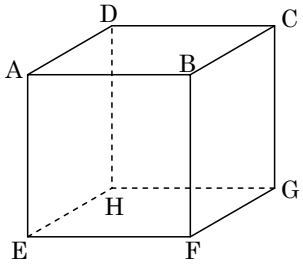
(2)　K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ。　[2013]

8　1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l，2 回目に出る目を m，3 回目に出る目を n で表すことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が存在する確率を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=\dfrac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が，$x>-1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ。　[2012]

9　n を 0 以上の整数とする。立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P，Q を考える。時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している。時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない。



(1)　時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか。可能な組み合わせをすべて挙げよ。

(2)　時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ。

(3)　時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする。また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする。p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。　[2010]

10　1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする。n を 500 以上の自然数とするとき，この反復試行が n 回で終わる確率を $p(n)$ とする。

(1)　$501 \leqq n \leqq 1000$ のとき，$p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ。

(2)　$p(1002)-p(1001)$ の値を求めよ。

(3)　$1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，$p(n+1)-p(n)$ の値を求めよ。　[2008]

11　n を $n \geqq 7$ を満たす整数とし，1 つのさいころを投げる試行を n 回くり返す。このとき，$2 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 k に対し，「n 回の試行のうち，同じ目が出るどの 2 つの試行も k 以上離れている」という事象が起こる確率を p_k と表す。ただし，i 番目の試行と j 番目の試行について，この試行は $|i-j|$ だけ離れているということにする。

(1)　p_2 の値を求めよ。

(2)　$k \geqq 3$ のとき，p_k の値を求めよ。

(3)「n 回の試行において，同じ目が続くことはなく，しかも同じ目が出る試行の組でちょうど 2 だけ離れたものが少なくとも 1 組存在する」という事象が起こる確率を求めよ。　[2002]

12　半径 1 の円周上に，$4n$ 個の点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} が，反時計回りに等間隔に並んでいるとする。ただし，n は自然数である。

(1)　線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k$ の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ。

(2)　点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} のうちの相異なる 3 点を頂点にもつ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ。　[2001]

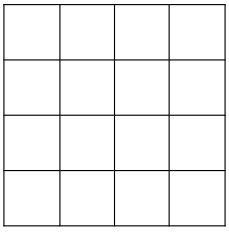
13　xy 平面上の 16 個の点からなる集合

$$\{(x,\ y) \mid x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ y=0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

を考える。この集合から異なる 3 点を無作為に選ぶ試行において，次の事象の起こる確率を求めよ。

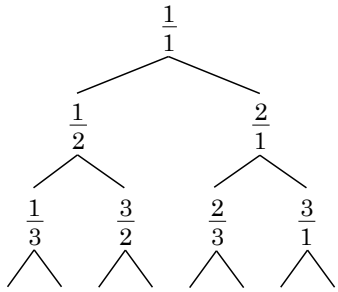
「選んだ 3 点が三角形の頂点となり，その三角形の面積は $\dfrac{9}{2}$ である」　[2000]

14　一辺の長さが 4 の正方形の紙の表を，図のように一辺の長さが 1 のマス目 16 個に区切る。その紙を 2 枚用意し，A と B の 2 人に渡す。A と B はそれぞれ渡された紙の 2 個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす。塗りつぶしたあと，両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても，塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を求めよ。ただし，2 枚の紙を重ね合わせるときには，それぞれの紙を回転させてもよいが，紙の四隅は合わせることとする。　[1999]



■ 論証

1　右の図は，$\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$，右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である。このとき以下の問いに答えよ。



(1)　この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ。ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす。

(2)　すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ。

(3)　この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ。

(4)　$\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ。たとえば，$\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である。　[2019]

2　実数 x, y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。　[2015]

3　以下の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ。

(2)　p，q，$\sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする。そのとき，$p = q = 0$ であることを示せ。　[2015]

4　a, b, c を正の定数とし，x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。以下，定数はすべて実数とする。

(1)　定数 p, q に対し，次を満たす定数 r が存在することを示せ。

$x \geqq 1$ ならば $|px + q| \leqq rx$

(2)　恒等式 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて，次を満たす定数 k, l が存在することを示せ。

$x \geqq 1$ ならば $\left|\sqrt[3]{f(x)} - x - k\right| \leqq \dfrac{l}{x}$

(3)　すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする。このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x+m)^3$ と表されることを示せ。　[2011]

5 (1)　$f(x)$ を x の整式とし，$\{a_k\}$ は $a_k < a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ および $\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ を満たす数列とする。このとき $f(a_k)=0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ ならば，$f(x)$ は整式として 0 であることを示せ。

(2)　$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ を x の整式とし，

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)\sin x+f_3(x)\sin 2x$$

はすべての実数 x に対して 0 であるとする。このとき $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$ は，いずれも整式として 0 であることを示せ。　[2003]

6 xy 平面上の点 $(a,\ b)$ は，a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。xy 平面において，3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし，必要ならば $\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしで使ってよい。　[1999]

■ 複素数

1 r を正の実数とする。複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$z+w=zw$ を満たす点 w が描く図形を求めよ。　[2022]

2 自然数 a, b に対し，$w=\cos\dfrac{a\pi}{3+b}+i\sin\dfrac{a\pi}{3+b}$ とおく。ただし，i は虚数単位とする。複素数 z_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を以下のように定める。

$$z_1=1,\ z_2=1-w,\ z_n=(1-w)z_{n-1}+wz_{n-2}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$a=4$，$b=3$ のとき，複素数平面上の点 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5，z_6，z_7 をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ。

(2)　$a=2$，$b=1$ のとき，z_{63} を求めよ。

(3)　さいころを 2 回投げ，1 回目に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。このとき $z_{63}=0$ である確率を求めよ。　[2019]

3　複素数 z は $z^5=1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする。硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 とおく。複素数 w を $w=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$ と定める。

(1)　5 回とも表が出たとする。w の値を求めよ。

(2)　$a_0=a_2=a_3=0$，$a_1=a_4=1$ のとき，$|w|<1$ であることを示せ。

(3)　$|w|<1$ である確率を求めよ。　[2017]

4　n を自然数とする。

(1)　n 個の複素数 z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0 \leqq \arg z_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすならば，不等式

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

が成り立つことを示せ。

(2)　n 個の実数 θ_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が

$$0 \leqq \theta_k \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad \cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=1$$

を満たすならば，不等式

$$\sqrt{n-1} \leqq \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$$

が成り立つことを示せ。　[2004]

5　a を正の実数，$w=a(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ)$ とする。ただし，i は虚数単位である。また，複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1=w$，$z_{n+1}=z_nw^{2n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1)　z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ。

(2)　複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする。$1 \leqq n \leqq 17$ であるような n について，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ。　[2003]

6　α を $|\alpha|=1$ であるような複素数とし，複素数の列 $\{z_n\}$ を

$$z_1=1,\ z_2=\frac{\alpha^4}{2},\ \frac{z_n}{z_{n-1}}=\frac{\alpha^2}{4}\frac{\overline{z_{n-2}}}{\overline{z_{n-1}}}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$$

で定める。ただし，$\overline{z_n}$ は複素数 z_n の共役な複素数とする。

(1)　各 n に対し，z_n を求めよ。

(2)　z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n，y_n とし，$\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくとき，無限級数の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}y_k$ をそれぞれ求めよ。　[2002]

7　2 つの複素数 $z=x+yi$，$w=u+vi$（$x,\ y,\ u,\ v$ は実数，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）に対し，$x \geqq u$ と $y \geqq v$ がともに成り立つとき，$z \gg w$ と書くことにする。

(1)　次の条件 $z^2 \gg 3$ かつ $\overline{z} \gg -\dfrac{5}{z}$ をみたす複素数 z の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数とする。

(2)　(1)で求めた範囲を z が動くとき，絶対値 $|z-3i|$ の最小値，および最小値をあたえる z を求めよ。　[2001]

■ 曲線

1　3 辺の長さの和が 2 である三角形 ABC において，辺 BC の長さを a，辺 CA の長さを b で表す。三角形 ABC を辺 BC を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を固定して b の値を変化させたとき，V が最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである。これを示せ。

(2)　$a,\ b$ の値をともに変化させるとき，V の最大値と，最大値を与える $a,\ b$ の値をそれぞれ求めよ。　[2020]

2　双曲線 $H: x^2-y^2=1$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)$ $(t \neq 0)$ を考える。

(1)　点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いて表せ。

(2)　点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いて表せ。

(3)　点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。　[2017]

3　$a>0$ とする。C_1 を曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，C_2 を直線 $y=2ax-3a$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が C_1 上を動き，点 Q が C_2 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする。$f(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} f(a)$ を求めよ。　[2012]

4　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。2 つの曲線

$$C_1 : x^2+3y^2=3,\ C_2 : \frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=2$$

の交点のうち，x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする。P における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とし，y 軸と l_1，l_2 の交点をそれぞれ Q, R とする。θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，線分 QR の長さの最小値を求めよ。　[2010]

5　直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。　[2006]

6　(1)　平面上において座標軸に平行な主軸（長軸，短軸）をもち，x 軸，y 軸の両方に接する楕円を考える。その中心の x 座標を a とする。このような楕円のうち，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ。ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする。

(2)　(1)の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して，その 2 つの楕円の中心を B, C とする。△ABC の面積を $S(a)$ で表すとき，この関数のグラフをかけ。

[2003]

■ 極限

1　n を 2 以上の自然数とする。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}\leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n-\log 2)$

[2023]

2　$f(x)=\log(x+1)+1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=x$ は，$x>0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2)　(1)の解を α とする。実数 x が $0<x<\alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0<\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$$

(3)　数列 $\{x_n\}$ を，$x_1=1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。このとき，すべての自然数 n に対して，$\alpha-x_{n+1}<\dfrac{1}{2}(\alpha-x_n)$ が成り立つことを示せ。

(4)　(3)の数列 $\{x_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を示せ。　[2022]

3　t を正の実数とする。xy 平面において，連立不等式

$$x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ xy\leqq 1,\ x+y\leqq t$$

の表す領域の面積を $S(t)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(S(t)-2\log t\right)$ を求めよ。　[2020]

4　円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする。

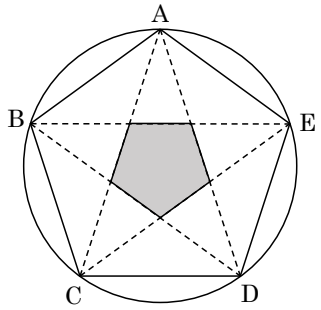
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2=y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の 1 辺の長さを x を用いて表せ。

(4)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$ を求めよ。　[2016]



網点部分が R_2

5　自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ $(x\geqq 0)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)dx$ を示せ。

(2)　数列 $\{I_n\}$ を，$I_n=\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx$ で定める。$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\log(1+x)\leqq\log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてよい。　[2015]

6　放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}_1(a_1,\ a_1{}^2)$，$\mathrm{A}_2(a_2,\ a_2{}^2)$，$\mathrm{A}_3(a_3,\ a_3{}^2)$，…を，$\mathrm{A}_{k+2}$　$(k\geqq 1)$ における C の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であるようにとる。ただし，$a_1<a_2$ とする。三角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積を T_k とし，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$ を S を用いて表せ。　[2009]

7　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の交点のうち第 1 象限にある点を $(p_n,\ q_n)$ とする。

(1)　不等式 $1-q_n{}^2\leqq\dfrac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=1$ を証明せよ。ただし，e は自然対数の底である。

(2)　$S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)dx$ を p_n で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n$ を求めよ。　[2009]

8　n を正の整数，a を正の実数とする。曲線 $y=x^n$ と曲線 $y=a\log x$ が，点 P で共通の接線をもつとする。ただし，対数は自然対数である。点 P の x 座標を t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a, t をそれぞれ n を用いて表せ。

(2)　曲線 $y=x^n$ と x 軸および直線 $x=t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする。また，曲線 $y=a\log x$ と x 軸および直線 $x=t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ。

(3)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x}+x-1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを，次の(a)，(b)に分けて示せ。ただし，e は自然対数の底とする。

(a)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^{-x}+x-1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(b)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x}+x-1$ が成り立つことを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。　[2005]

9　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す。n を正の整数とし，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\,\right]}{n^2}$$

とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[2000]

■ 微分法

1　P を座標平面上の点とし，点 P の座標を $(a,\ b)$ とする。$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 t のうち，曲線 $y=\cos x$ 上の点 $(t,\ \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(\mathrm{P})$ とする。$N(\mathrm{P})=4$ かつ $0<a<\pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ。　[2023]

2　$a,\ b$ を $ab<1$ を満たす正の実数とする。xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$，$\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とする。ただし，$s<t$ とする。

(1)　s および t を a, b で表せ。

(2)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が曲線 $y=\dfrac{9}{4}-3x^2$ 上の $x>0$，$y>0$ を満たす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの a, b の値を求めよ。　[2021]

3　次の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。x についての方程式 $x-\tan x=a$ の実数解のうち，$|x|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすものがちょうど 1 個あることを示せ。

(2)　自然数 n に対し，$x-\tan x=n\pi$ かつ $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 x を x_n とおく。t を $|t|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。このとき，曲線 $C: y=\sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が x_1，x_2，x_3，…のいずれかと等しいことであることを示せ。

[2021]

4　関数 $f(x)=(x+1)^{\frac{1}{x+1}}$ $(x \geqq 0)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$f(x)$ とその導関数の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)$ をそれぞれ求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを用いてもよい。

(3)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸を調べる必要はない。

[2020]

5　次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ の範囲で不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成り立つことを示せ。

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

[2018]

6　次の問いに答えよ。

(1)　c を正の定数とする。正の実数 $x,\ y$ が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2)　正の実数 $x,\ y,\ z$ が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。　[2016]

7　$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$ が成り立つ。

(イ)　$t>0$ に対して，等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$ を満たす実数 x が存在する。

このとき，$f(t)$ を求めよ。　[2014]

8　三角関数の極限に関する公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を示すことにより，$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ。　[2013]

9　実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を考える。θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする。D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。　[2011]

10　N を 2 以上の自然数とする。

(1)　関数 $f(x)=(N-x)\log x$ を $1\leqq x\leqq N$ の範囲で考える。このとき，曲線 $y=f(x)$ は上に凸であり，関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる。このことを示せ。

(2)　自然数の列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_N$ を

$$a_n=n^{N-n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$$

で定める。$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_N$ のうちで最大の値を M とし，$M=a_n$ となる n の個数を k とする。このとき $k\leqq 2$ であることを示せ。

(3)　(2)で $k=2$ となるのは, N が 2 のときだけであることを示せ。　[2008]

11　次の問いに答えよ。

(1)　x が正の数のとき，$|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ。

(2)　p, q, r が $p+q+r=1$ を満たす正の数のとき，$p^2+q^2+r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$ を示せ。

(3)　a, b, c が相異なる正の数で，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \frac{1}{3}$$

を示せ。　[2007]

12　$f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。　[2005]

13　(1)　$0<t<1$ のとき，不等式 $\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ。

(2)　k を正の定数とする。$a>0$ とし，曲線 $C: y=e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える。このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標はつねに正であることを示せ。　[2003]

14　$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ とおく。曲線 $y=f(x)$ に点 $(0,\ a)$ から接線がただ一つ引けるとし，しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときの a の値を求めよ。　[2001]

■ 積分法

1　n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ を満たす実数とする。

(1)　$x \geqq t$ のとき，不等式 $-\dfrac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t) \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $-\dfrac{1}{6n^3} \leqq \displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2tn^2} \leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ を満たすような実数 $p,\ q$ の値を求めよ。　[2021]

2　以下の問いに答えよ。ただし，log は自然対数，e はその底とする。

(1)　b を実数とする。関数 $f(x)=\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ は単調に減少することを示せ。

(2)　$a \leqq b$ を満たす正の実数 a, b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。$I_n=\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

このとき極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n$ を求めよ。ただし $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0$ を用いてもよい。

[2019]

3　$\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。　[2014]

4　関数 $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ を考える。ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする。

(1)　$f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする。等式 $\log f''(x)=-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ を求めよ。　[2010]

5　関数 $f(x)=4\cos^2 x-8\cos x+3$ を考える。n , k を自然数とし

$$g_n(k)=f\left(\frac{\pi}{3n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし $n \geqq 2$ とする。

(1)　n を固定する。$2 \leqq k \leqq 3n$ の範囲で $g_n(k-1) \geqq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ。また，k が $1 \leqq k \leqq 3n$ の範囲を動くとき，$g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ。

(2)　(1)における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする。このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}$ を求めよ。

[2001]

■ 積分の応用

1　座標平面において，t を媒介変数として

$$x=e^t\cos t+e^{\pi},\ \ y=e^t\sin t\quad(0\leqq t\leqq\pi)$$

で表される曲線を C とする。曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2022]

2　2 つの関数 $f(t)=2\sin t+\cos 2t$，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C:x=f(t),\ \ y=g(t)\quad\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1)　t が $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2)　t_1，t_2 を $0\leqq t_1<t_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。

(3)　C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。 [2018]

3　xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1)　t を $0\leqq t\leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2)　M の体積 V を求めよ。 [2017]

4　座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 $(a,\ b)$ をもつとする。

(1)　a, b, r の値をそれぞれ求めよ。

(2)　連立不等式 $a\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq\sqrt{2}(x-1)^2$，$x^2+y^2\geqq r^2$ の表す領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2016]

5　座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。P, Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2)　$V(t)$ の最大値を求めよ。　[2015]

6　半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している。互いに重なる部分のない等しい半径をもつ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 T_1，T_2，…，T_n があり，次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　T_i は S_1，S_2 にそれぞれ 1 点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

(イ)　T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　T_1，T_2，…，T_n の共通の半径 r_n を求めよ。

(2)　S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，T_1，T_2，…，T_n の体積の和を W_n とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$ を求めよ。　[2014]

7　xyz 空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2013]

8　xyz 空間に 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 1)，B(0, $\sqrt{3}$, 1) がある。平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする。点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　平面 $z=\cos\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。

(2)　立体 V の体積を求めよ。　[2012]

9　半径 3 の球T_1と半径 1 の球T_2が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

(A)　S はT_1の内部にあるかT_1に内接している。

(B)　S はT_2の外部にあるかT_2に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。　[2010]

10　t を負の実数とし，xy 平面上で曲線 $y=2^{2x+2t}$ と $y=2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする。

(1)　D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積$V(t)$を求めよ。

(2)　t が負の実数の範囲を動くとき，$V(t)$の最大値を求めよ。　[2008]

11　n を自然数とする。関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを C とし，C 上の 2 点$(n,\ \sqrt{n})$と$(n+1,\ \sqrt{n+1})$を通る直線を l とする。C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき $\lim_{n\to\infty} n^a V=b$ を満たす正の数 $a,\ b$ を求めよ。　[2007]

12　$f(x)=x^3-x$ とし，t を実数とする。xy 平面において，曲線 $y=f(x)$ をC_1とし，直線 $x=t$ に関してC_1と対称な曲線 $y=f(2t-x)$ をC_2とする。

(1)　C_1とC_2が 3 点で交わるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき，C_1とC_2で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ。　[2007]

13　曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ の共有点のうち, x 座標が正のものを, x 座標が小さいものから順にA_1，A_2，A_3，…とし，第 n 番目の点をA_nとする。以下の問いに答えよ。

(1)　点A_nの x 座標を求めよ。また，点A_nにおいて，曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ は接していることを示せ。

(2)　線分$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$と曲線 $y=x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

14　n を 3 以上の自然数とする。点 O を中心とする半径 1 の円において，円周を n 等分する点 P_0，P_1，…，P_{n-1} を時計回りにとる。各 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，直線 OP_{i-1}，OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}，P_i で接するような放物線を C_i とする。ただし，$P_n=P_0$ とする。放物線 C_1，C_2，…，C_n によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。　[2004]

15　平面上に双曲線 $C: y=\dfrac{1}{x}$ を考える。$a,\ b,\ c,\ d$ を $d<c<0<b<a$ を満たす数とし，曲線 C 上の 4 点 P, Q, R, S をそれぞれ x 座標が $a,\ b,\ c,\ d$ であるような点としたとき，四角形 PQSR が長方形になっているとする。

(1)　b, c, d を a を用いて表せ。

(2)　線分 PR と x 軸との交点を T，線分 QS と y 軸との交点を U とするとき，線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲にあるとき，3 線分 PT, TU, UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　a が(2)の範囲を動くとき，$S(a)$ の増減を調べ，その最大値を求めよ。　[2002]

16　平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $P(0,\ \sin\alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。ただし $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし，A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ l_A，l_B とする。2 直線 l_A，l_B ではさまれた領域の部分で，円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1，円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする。いま，D_1，D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha)$，$V_2(\alpha)$ とする。

(1)　$V_1(\alpha)$，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ。

(2)　α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ。　[2002]

17　曲線 $C: y=e^x$ と直線 $l: y=ax+b\ (a>0)$ が 2 点 $P(x_1,\ y_1)$ と $Q(x_2,\ y_2)$ で交わっている。だだし，$x_1<x_2$ とする。

(1)　$x_2-x_1=c$ とおくとき，y_1 と y_2 を a と c を用いて表せ。

(2)　P と Q の距離が 1 であるとする。曲線 C と x 軸および 2 直線 $x=x_1$，$x=x_2$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる回転体の体積を $V(a)$ とおくとき，$\lim_{a\to\infty}\dfrac{V(a)}{a}$ を求めよ。　[1999]

18　xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0,\ 0,\ a)$，$(1,\ 0,\ a)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である。また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0,\ a,\ 0)$，$\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である。

このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。　[1999]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\cos 4\alpha=\cos 3\alpha$ であることを示せ。

(2)　$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とするとき，$f(\cos\alpha)=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\cos\alpha$ は無理数であることを示せ。　[2022]

解答例＋映像解説

(1)　$\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ のとき，$7\alpha=2\pi$ から $4\alpha=2\pi-3\alpha$ となり，

$$\cos 4\alpha=\cos(2\pi-3\alpha)=\cos 3\alpha \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　$\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1=2(2\cos^2\alpha-1)^2-1=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$ から，①より，

$$8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=0$$

すると，$(\cos\alpha-1)(8\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-4\cos\alpha-1)=0$ となり，$0<\cos\alpha<1$ から，

$$8\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-4\cos\alpha-1=0$$

よって，$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とするとき，$f(\cos\alpha)=0$ が成り立つ。

(3)　p, q を互いに素な自然数として，$\cos\alpha=\dfrac{q}{p}$ とおくと，$f(\cos\alpha)=0$ から，

$$\frac{8q^3}{p^3}+\frac{4q^2}{p^2}-\frac{4q}{p}-1=0,\ 8q^3+4pq^2-4p^2q-p^3=0$$

これより，$p^3=q(8q^2+4pq-4p^2)\cdots\cdots\cdots ②$

ここで，p と q は互いに素なので，p^3 と q も互いに素となり，②から q は p^3 の約数なので，$q=1$ である。

このとき，②は $p^3=8+4p-4p^2$ となり，$p(p^2+4p-4)=8\cdots\cdots\cdots ③$

③より，p は 8 の約数となり，$p=1,\ 2,\ 4,\ 8$ である。

・$p=1$ のとき　$p^2+4p-4=1$ となり，③を満たさない。

・$p=2$ のとき　$p^2+4p-4=8$ となり，③を満たさない。

・$p=4$ のとき　$p^2+4p-4=28$ となり，③を満たさない。

・$p=8$ のとき　$p^2+4p-4=92$ となり，③を満たさない。

以上より，③を満たす自然数 p は存在しないので，$p,\ q$ を互いに素な自然数として，$\cos\alpha=\dfrac{q}{p}$ と表せない。すなわち，$\cos\alpha$ は無理数である。

コメント

まったく同じ問題を経験済みかもしれませんが，三角関数の値を題材にした有名な論証問題です。(3)の背理法の証明は，いろいろな方法が考えられます。

問　題

a, b を正の実数とし，$f(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$ とする。

(1)　c を実数とし，$f(x)$ が $x-c$ で割り切れるとする。このとき，$c>0$ であり，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れることを示せ。

(2)　$f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるとき，$a \geqq 4$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a=5$ とする。$f(x)$ がある実数 s, t, u, v を用いて

$$f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$$

と因数分解できるような自然数 b の値をすべて求めよ。　[2018]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=x^4-ax^3+bx^2-ax+1$　$(a>0,\ b>0)$ に対して，$f(x)$ が $x-c$ で割り切れることから，$f(c)=0$ となり，

$$c^4-ac^3+bc^2-ac+1=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$c=0$ のときは $c^4-ac^3+bc^2-ac+1=1$ から①は成り立たず，$c<0$ のときは $c^4-ac^3+bc^2-ac+1>0$ から①は成り立たない。

よって，①が成立する c は $c>0$ である。そして，このとき①から，

$$f\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{c^4}-\frac{a}{c^3}+\frac{b}{c^2}-\frac{a}{c}+1=\frac{1}{c^4}(1-ac+bc^2-ac^3+c^4)=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

(i)　$c \neq 1$ のとき

このとき $c \neq \dfrac{1}{c}$ となり，①②から，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れる。

(ii)　$c=1$ のとき

①から，$1-a+b-a+1=0$ となり，$b=2a-2$ より，

$$f(x)=x^4-ax^3+(2a-2)x^2-ax+1$$

因数分解すると，$f(x)=(x-1)^2\{x^2+(-a+2)x+1\}$ となるので，この場合も，$f(x)$ は $(x-c)\left(x-\dfrac{1}{c}\right)$ で割り切れる。

(2)　$f(x)$ が $f(x)=(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$ と因数分解できるとき，定数項に注意すると，(1)から $s>0$，$t>0$ として，$u=\dfrac{1}{s}$，$v=\dfrac{1}{t}$ とおくことができ，

$$x^4-ax^3+bx^2-ax+1=(x-s)(x-t)\left(x-\frac{1}{s}\right)\left(x-\frac{1}{t}\right) \cdots\cdots\cdots ③$$

x^3 の係数を比較して，$-a=-s-t-\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{t}$ となり，$a=s+\dfrac{1}{s}+t+\dfrac{1}{t} \cdots\cdots\cdots ④$

また，x の係数を比較したときも，④が得られる。

そこで，相加平均と相乗平均の関係から，④は，

$$a=s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{1}{s}}+2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=4$$

(3)　$a=5$ のとき，④から $s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}=5$ ……⑤となり，③の x^2 の係数を比較して，

$$b=st+\frac{1}{st}+\frac{t}{s}+\frac{s}{t}+2=\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)+2\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$p=s+\frac{1}{s}$，$q=t+\frac{1}{t}$ とおくと，$p\geqq 2$，$q\geqq 2$ で，⑤⑥より，

$$p+q=5\cdots\cdots\cdots⑦,\ b=pq+2\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦より，$q=5-p\geqq 2$ となり，$2\leqq p\leqq 3$ において，

$$b=p(5-p)+2=-p^2+5p+2=-\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{33}{4}$$

すると，$2\leqq p\leqq 3$ で $8\leqq b\leqq\frac{33}{4}$ となり，自然数 b の値は $b=8$ である。

コメント

相反方程式を題材にした高次方程式に関する問題です。細かな誘導がついていますので，因数定理などを用いた論証を丁寧に行う必要があります。

問　題

α を 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解とするとき，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，必要ならば，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい。 [2009]

解答例

α は 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解より，$\alpha^2=2\alpha+1$ となり，

$$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=ab+(5ac+5b)\alpha+25c(2\alpha+1)$$
$$=(ab+25c)+(5ac+5b+50c)\alpha$$

条件より，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ なので，

$$(ab+25c-1)+5(ac+b+10c)\alpha=0$$

ここで, a, b, c は整数，$\alpha=1\pm\sqrt{2}$ は無理数より，

$$ab+25c-1=0\cdots\cdots\cdots①,\ ac+b+10c=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$b=-c(a+10)$ となり，①に代入すると，

$$-ac(a+10)+25c-1=0,\ c(-a^2-10a+25)=1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，③から c は 1 の約数となり，$c=\pm1$ である。

(i)　$c=1$ のとき

③より，$-a^2-10a+25=1$，$a^2+10a-24=0$，$(a+12)(a-2)=0$

$a=-12$ のとき $b=-1\times(-2)=2$，$a=2$ のとき $b=-1\times12=-12$ となる。

(ii)　$c=-1$ のとき

③より，$-a^2-10a+25=-1$，$a^2+10a-26=0$ となり，整数解はない。

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(-12,\ 2,\ 1)$，$(2,\ -12,\ 1)$

コメント

整数についての基本問題です。式も扱いやすく，計算量も少なめです。

問　題

実数を係数とする 3 次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$が異なる 3 つの実数解をもつとする。このとき，$a>0$，$b>0$ ならば，少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ。

[2002]

解答例

$x^3+ax^2+bx+c=0$の異なる 3 つの実数解を$x=\alpha$，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$とおくと，

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-c$$

条件より，$a>0$, $b>0$ なので，$\alpha+\beta+\gamma<0$ ……①，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0$ ……②

①より，$0>\alpha+\beta+\gamma>\alpha+\alpha+\alpha=3\alpha$ なので，$\alpha<0$ となる。

ここで，$\beta\geqq 0$ と仮定すると$\gamma>0$ となり，①より$\alpha+\beta<-\gamma<0$ なので，

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)<0$$

これは②に反するので，$\beta<0$ である。

以上より，α，β，γ の少なくとも 2 つは負である。

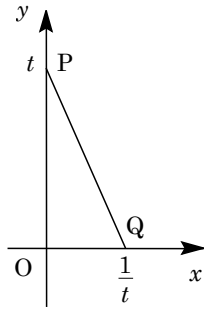
コメント

グラフを利用しようか，解と係数の関係を利用しようかと迷いましたが，結局，後者で解をつくりました。

問　題

正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える。t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ。　[2022]

解答例＋映像解説



$t>0$ のとき，2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を端点とする線分の方程式は，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のもとで，

$$tx+\frac{y}{t}=1,\ t^2x+y=t \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過する点 $(x,\ y)$ は，$(*)$ を t についての方程式としてみたとき，$1 \leqq t \leqq 2$ に解を少なくとも 1 つもつ条件として得られる。

$(*)$ から，$xt^2-t+y=0$ となり，$f(t)=xt^2-t+y$ とおくと，

(i)　$x=0$ のとき

$f(t)=-t+y$ となり，$f(t)=0$ から $t=y$ なので，$1 \leqq y \leqq 2$ である。

(ii)　$x>0$ のとき

$f(t)=x\left(t-\dfrac{1}{2x}\right)^2-\dfrac{1}{4x}+y$ から $f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=-\dfrac{1}{4x}+y$ であり，また $f(1)=x-1+y$，$f(2)=4x-2+y$ となるので，$t=\dfrac{1}{2x}$ と $1 \leqq t \leqq 2$ の関係から，

(ii-i)　$\dfrac{1}{2x}<1\left(x>\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f(t)=0$ の解が $1 \leqq t \leqq 2$ に少なくとも 1 つある条件は，

$$f(1) \leqq 0 \ \text{かつ}\ f(2) \geqq 0$$

よって，$x-1+y \leqq 0$ かつ $4x-2+y \geqq 0$ から，$-4x+2 \leqq y \leqq -x+1$

(ii-ii)　$1 \leqq \dfrac{1}{2x} \leqq 2\left(\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f(t)=0$ の解が $1 \leqq t \leqq 2$ に少なくとも 1 つある条件は，

$$f\left(\frac{1}{2x}\right) \leqq 0 \ \text{かつ（}f(1) \geqq 0\ \text{または}\ f(2) \geqq 0\text{）}$$

よって，$-\dfrac{1}{4x}+y \leqq 0$ かつ（$x-1+y \geqq 0$ または $4x-2+y \geqq 0$）から，

$$y \leqq \frac{1}{4x}\ \text{かつ（}y \geqq -x+1\ \text{または}\ y \geqq -4x+2\text{）}$$

(ii-iii)　$\dfrac{1}{2x}>2\left(0<x<\dfrac{1}{4}\right)$ のとき

$f(t)=0$ の解が $1 \leqq t \leqq 2$ に少なくとも 1 つある条件は，

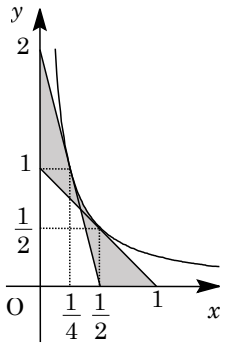
$$f(1) \geqq 0 \ \text{かつ}\ f(2) \leqq 0$$

よって，$x-1+y \geqq 0$ かつ $4x-2+y \leqq 0$ から，

$$-x+1 \leqq y \leqq -4x+2$$

(i)(ii)より，線分 PQ の動く範囲は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。



コメント

線分の通過領域の問題です。上の解答例は，方程式の解の配置として処理をしましたが，たとえば x を固定して y のとりうる範囲を調べるという方法もあります。

問　題

実数 $s,\ t$ が $s^2+t^2 \leqq 6$ を満たしながら変わるとき，xy 平面上で点 $(s+t,\ st)$ が動く領域を A とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$(2,\ \sqrt{2})$ が領域 A の点かどうか判定せよ。

(2)　A を図示せよ。

(3)　A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2019]

解答例＋映像解説

(1)　実数 $s,\ t$ が $s^2+t^2 \leqq 6$ のとき，$(x,\ y)=(s+t,\ st)$ とおき，点 $(x,\ y)$ が動く領域を A とする。

ここで，$(x,\ y)=(2,\ \sqrt{2})$ のとき，$s+t=2$，$st=\sqrt{2}$ から，$s,\ t$ は 2 次方程式 $u^2-2u+\sqrt{2}=0$ の 2 つの解となるが，$D/4=1-\sqrt{2}<0$ なので実数でない。

よって，$(2,\ \sqrt{2})$ は領域 A の点でない。

(2)　まず，$s+t=x$，$st=y$ から，s, t は 2 次方程式 $u^2-xu+y=0$ の解となり，

$$D=x^2-4y \geqq 0,\ \ y \leqq \frac{1}{4}x^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$s^2+t^2 \leqq 6$ から，$(s+t)^2-2st \leqq 6$ となり，

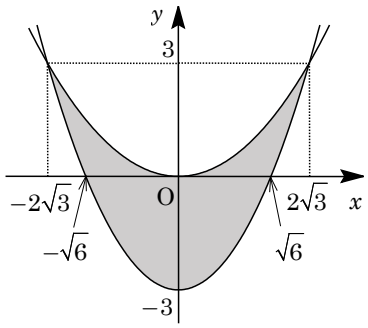
$$x^2-2y \leqq 6,\ \ y \geqq \frac{1}{2}x^2-3 \cdots\cdots\cdots ②$$

①と②の境界線の共有点は，$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{2}x^2-3$ より，

$$\frac{1}{4}x^2=3,\ \ x^2=12$$

よって，$x=\pm 2\sqrt{3}$，$y=\frac{1}{4}\cdot 12=3$

したがって，①②から領域 A は右図の網点部となる。ただし，境界は含む。

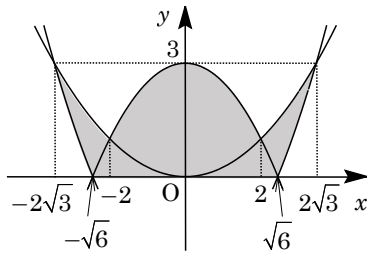


(3)　領域 A の $y \leqq 0$ の部分を x 軸に関して折り返すと，右図の網点部になり，②の境界線は

$$y=-\frac{1}{2}x^2+3 \cdots\cdots\cdots ③$$

そして，①の境界線と③の共有点は，

$$\frac{1}{4}x^2=-\frac{1}{2}x^2+3,\ \ x=\pm 2$$



さて，A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体は，上図の網点部の x 軸のまわりの回転体に一致し，y 軸に関する対称性から，その体積 V は，

$$\frac{V}{2}=\pi\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+3\right)^2dx+\pi\int_2^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2dx-\pi\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2dx$$

ここで，$\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2dx=\left[\frac{x^5}{80}\right]_2^{2\sqrt{3}}=\frac{18}{5}\sqrt{3}-\frac{2}{5}$

$$\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+3\right)^2dx=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx=\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_0^2=\frac{58}{5}$$

$$\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2dx=\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx=\left[\frac{x^5}{20}-x^3+9x\right]_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}$$

$$=\left(\frac{72}{5}\sqrt{3}-24\sqrt{3}+18\sqrt{3}\right)-\left(\frac{9}{5}\sqrt{6}-6\sqrt{6}+9\sqrt{6}\right)=\frac{42}{5}\sqrt{3}-\frac{24}{5}\sqrt{6}$$

よって，$\displaystyle\frac{V}{2}=\left(\frac{58}{5}+\frac{18}{5}\sqrt{3}-\frac{2}{5}-\frac{42}{5}\sqrt{3}+\frac{24}{5}\sqrt{6}\right)\pi=\frac{56-24\sqrt{3}+24\sqrt{6}}{5}\pi$ から，

$$V=\frac{112-48\sqrt{3}+48\sqrt{6}}{5}\pi$$

コメント

領域の典型題に回転体の体積計算を付加した問題です。ただ，後半の定積分の数値計算はやや難です。

問　題

b, c を実数とする。2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が，$0 \leqq f(1) \leqq 2$，$5 \leqq f(3) \leqq 6$ を満たすとする。

(1)　$f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2017]

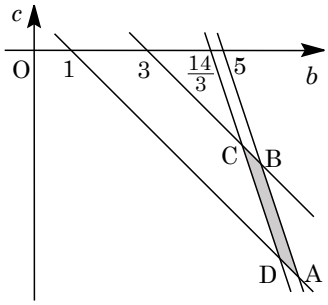
解答例

(1)　$f(x)=-x^2+bx+c$ に対して，$0 \leqq f(1) \leqq 2$，$5 \leqq f(3) \leqq 6$ より，

$$0 \leqq -1+b+c \leqq 2 \cdots\cdots\cdots ①,\ 5 \leqq -9+3b+c \leqq 6 \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$-b+1 \leqq c \leqq -b+3$

②より，$-3b+14 \leqq c \leqq -3b+15$



この連立不等式を bc 平面上に図示すると，右図の網点をつけた平行四辺形の内部または辺上となる。

さらに，①②の境界線の方程式を連立して 4 つの頂点の座標を求めると，A$(7,\ -6)$，B$(6,\ -3)$，C$\left(\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$，D$\left(\dfrac{13}{2},\ -\dfrac{11}{2}\right)$ である。

さて，$f(4)=k$ とおくと，$-16+4b+c=k$ すなわち $c=-4b+k+16 \cdots\cdots\cdots ③$

そして，直線③が右上の領域と共有点をもつ k の範囲を求める。

すると，図より，k は A$(7,\ -6)$ において最大値 $-16+28-6=6$ をとり，C$\left(\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$ において最小値 $-16+22-\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$ をとる。

よって，$\dfrac{7}{2} \leqq f(4) \leqq 6$ である。

(2)　$f(x)=-\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{b^2}{4}+c$ より，放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標を q とすると，$q=\dfrac{b^2}{4}+c$ すなわち $c=-\dfrac{b^2}{4}+q \cdots\cdots ④$ となる。

そして，放物線④が右上の領域と共有点をもつ q の範囲を求める。すると図より，頂点を通るとき，辺と接するときに，q は最大または最小になることがわかる。

そこで，A$(7,\ -6)$ における q の値は $\dfrac{49}{4}-6=\dfrac{25}{4}$，B$(6,\ -3)$ における q の値は $9-3=6$，C$\left(\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$ における q の値は $\dfrac{121}{16}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{81}{16}$，D$\left(\dfrac{13}{2},\ -\dfrac{11}{2}\right)$ における q の値は $\dfrac{169}{16}-\dfrac{11}{2}=\dfrac{81}{16}$ である。

さらに，④から $c'=-\dfrac{b}{2}$ より，接線の傾きが -1 となるのは $-\dfrac{b}{2}=-1$ すなわち $b=2$ のときであるが，この点は辺 AD，辺 BC 上にはない。

また，接線の傾きが -3 となるのは $-\dfrac{b}{2}=-3$ すなわち $b=6$ のときであり，辺 AB，辺 CD 上の点について調べると，点 $\mathrm{B}(6,\ -3)$ および辺 CD の中点 $\mathrm{M}(6,\ -4)$ があてはまる。そして，M における q の値は $9-4=5$ である。

以上より，q のとりうる値の範囲は $5\leqq q\leqq\dfrac{25}{4}$ である。

(3)　$q=6$ のとき，$f(x)=-\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2+6$ となる。

そこで，放物線 $y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は，$-\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2+6=0$ より，

$$x=\frac{b}{2}-\sqrt{6},\ \ x=\frac{b}{2}+\sqrt{6}$$

これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+6\right\}dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}$$

コメント

解法の方針は基本的なものですが，特に(2)において，詰めの部分がかなり面倒です。そのため，解答にすさまじい時間が必要です。なお，(3)は付録のような設問で，不思議なことに単独に解くことができます。

問　題

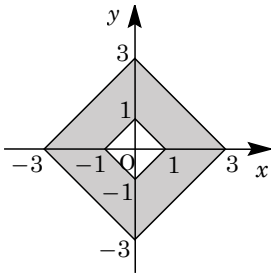
不等式 $1 \leqq ||x|-2|+||y|-2| \leqq 3$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。　[2013]

解答例

まず，$f(x,\ y)=||x|-2|+||y|-2|$ とおくと，

$$f(x,\ -y)=f(-x,\ y)=f(x,\ y)$$

これより，$1 \leqq f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域は，x 軸対称かつ y 軸対称である。

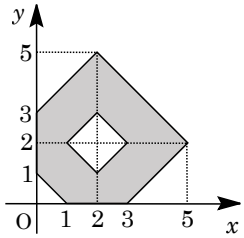


そこで，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の場合について考える。

このとき，$1 \leqq f(x,\ y) \leqq 3$ の表す不等式は，

$$1 \leqq |x-2|+|y-2| \leqq 3 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，①で表される領域は，不等式 $1 \leqq |x|+|y| \leqq 3$ ……②で表される領域を，x 軸方向に 2，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。

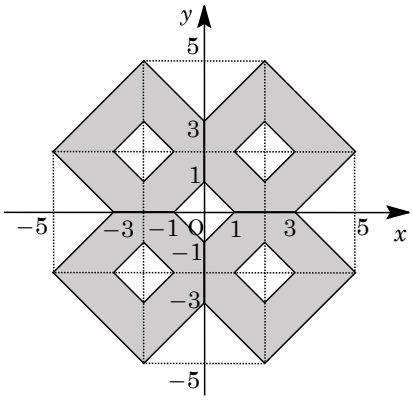


まず，不等式②で表される領域は，右上図の網点部となる。

すると，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ において，不等式①で表す領域は，右図のようになる。

この領域を x 軸対称かつ y 軸対称した領域が，不等式 $1 \leqq f(x,\ y) \leqq 3$ の表す領域である。

すなわち，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

言葉で書くと，一番上の図を平行移動して後，座標軸に関してパタパタ折り返していくだけですが，これを図示していくのには時間がかかってしまいます。

問　題

実数の組$(p,\ q)$に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$とおく。

(1)　放物線$y=f(x)$が点$(0,\ 1)$を通り，しかも直線$y=x$の $x>0$ の部分と接するような実数の組$(p,\ q)$と接点の座標を求めよ。

(2)　実数の組$(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$および$f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$とおく。実数α，β（ただし$\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha)\ \text{かつ}\ f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間$\alpha\leqq x\leqq\beta$において不等式$f_1(x)<f_2(x)$がつねに成り立つことを示せ。

(3)　長方形$R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$を考える。また，4点$\mathrm{P}_0(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0)$をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組$(p,\ q)$を，放物線$y=f(x)$と折れ線 L が共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，Rの点のうちで放物線$y=f(x)$が通過する点全体の集合を T とする。R から T を除いた領域Sを座標平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$f(x)=(x-p)^2+q$に対して，条件から，$f(0)=1$となり，$p^2+q=1$ ……①

次に，$y=f(x)$と$y=x$を連立して，

$$(x-p)^2+q=x,\ x^2-(2p+1)x+p^2+q=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x>0$で，$y=f(x)$と$y=x$が接することより，$f(x)=x$は正の重解をもち，

$$D=(2p+1)^2-4(p^2+q)=0\ \cdots\cdots\cdots③,\ 2p+1>0\ \cdots\cdots\cdots④$$

①③より，$(2p+1)^2=4$となり，④から，$2p+1=2$，$p=\dfrac{1}{2}$

①に代入すると，$q=\dfrac{3}{4}$となり，このとき②の重解は，$x=\dfrac{2p+1}{2}=1$

よって，接点の座標は，$(1,\ 1)$である。

(2)　$g(x)=f_2(x)-f_1(x)$とおくと，条件より$g(\alpha)>0$かつ$g(\beta)>0$であり，

$$g(x)=(x-p_2)^2+q_2-(x-p_1)^2-q_1=-2(p_2-p_1)x+{p_2}^2-{p_1}^2+q_2-q_1$$

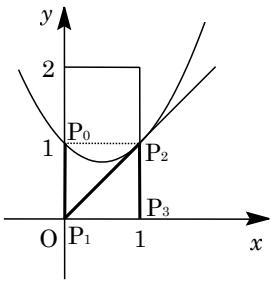
(i)　$p_2\geqq p_1$のとき　$g(x)$は単調に減少し，$\alpha<x<\beta$において，$g(x)\geqq g(\beta)>0$

(ii)　$p_2<p_1$のとき　$g(x)$は単調に増加し，$\alpha<x<\beta$において，$g(x)\geqq g(\alpha)>0$

(i)(ii)より，$\alpha\leqq x\leqq\beta$において$f_1(x)<f_2(x)$が成り立つ。

(3)　点$(0,\ 1)$を通り，直線$y=x$と点$(1,\ 1)$で接する放物線は，(1)より，

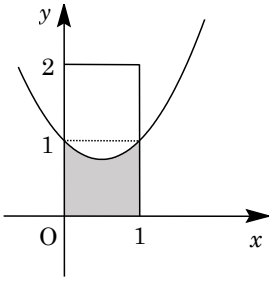
$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2-x+1$$



この放物線を $y=f_1(x)$ とおき，放物線 $y=f(x)$ が，不等式 $1=f_1(0)<f(0)$ かつ $1=f_1(1)<f(1)$ を満たすとすると，(2)より，$y=f(x)$ は折れ線 L と共有点をもたない。

また，$f(0)\leqq f_1(0)$ または $f(1)\leqq f_1(1)$ が満たされるとき，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ は，折れ線 L と共有点をもつ。

そこで，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ を，折れ線 L と共有点がないように動かすとき，$y=f(x)$ が通過する領域は，$y=f_1(x)$ の上部全体となる。



したがって，長方形 R から，上記の通過領域 T を除いた領域 S を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含む。また，この領域 S の面積は，

$$\int_0^1 (x^2-x+1)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$

コメント

(3)の論理展開は感覚的すぎると思いながらも，この程度の記述に留めました。

問　題

θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x = t\cos\theta,\ \ y = 1 - t^2 + t\sin\theta$$

で与えられるような動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える。t が実数全体を動くとき，点 P が描く曲線を C とする。C が x 軸の $x \geqq 0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，Q の x 座標を求めよ。

(2)　θ が変化すると曲線 C も変化する。θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき，C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3)　θ が変化すると点 Q も変化する。Q の x 座標が最大となるような θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　条件より，$x = t\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……①，$y = 1 - t^2 + t\sin\dfrac{\pi}{4} = 1 - t^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……②

$y = 0$ とすると，②から $1 - t^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}t = 0$ より，

$$\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0,\ (\sqrt{2}t + 1)(t - \sqrt{2}) = 0$$

$x \geqq 0$ より $t \geqq 0$ なので，$t = \sqrt{2}$ となり，①から点 Q の x 座標は $x = 1$ である。

(2)　$x = t\cos\theta$ ……③，$y = 1 - t^2 + t\sin\theta$ ……④に対して，

$t = 0$ のとき，$(x,\ y) = (0,\ 1)$

$t \neq 0$ のとき，③④より $\cos\theta = \dfrac{x}{t}$，$\sin\theta = \dfrac{y - 1 + t^2}{t}$ から，

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y - 1 + t^2}{t}\right)^2 = 1,\ x^2 + (y - 1 + t^2)^2 = t^2 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤は $(x,\ y) = (0,\ 1)$ を満たしているので，$t = 0$ のときも成り立つ。

さて，t が実数全体を動くとき，曲線⑤が通過する範囲は，⑤を t の方程式をしてみたとき，実数 t が存在する条件として求めることができる。

⑤から，$x^2 + (y - 1)^2 + 2(y - 1)t^2 + t^4 = t^2$

$$t^4 + (2y - 3)t^2 + x^2 + (y - 1)^2 = 0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

ここで，$u = t^2 \geqq 0$ とおくと，⑥は $u^2 + (2y - 3)u + x^2 + (y - 1)^2 = 0$ ……⑦となり，2 次方程式⑦が，0 以上の解を少なくとも 1 つもつ条件となる。

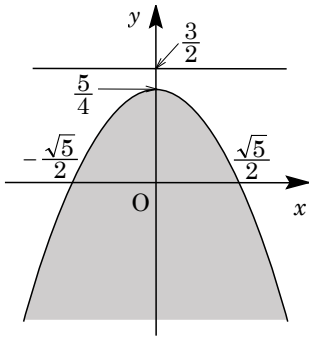
そこで，$f(u) = u^2 + (2y - 3)u + x^2 + (y - 1)^2$ とおき，$f(0) = x^2 + (y - 1)^2 \geqq 0$ に注意すると，

$$D=(2y-3)^2-4\{x^2+(y-1)^2\}\geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑧$$

$$u=-\frac{2y-3}{2}\geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑨$$

⑧から，$-4y-4x^2+5\geqq 0$，$y\leqq -x^2+\frac{5}{4}$

⑨から，$2y-3\leqq 0$，$y\leqq \frac{3}{2}$



以上まとめると，曲線 C が通過する範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。

(3)　点 Q の x 座標の最大値は，(2)より $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ であり，③④より，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}=t\cos\theta \cdots\cdots ⑩,\quad 0=1-t^2+t\sin\theta \cdots\cdots ⑪$$

⑩より，$t=\frac{\sqrt{5}}{2\cos\theta}$ となり，⑪に代入すると，

$$1-\frac{5}{4\cos^2\theta}+\frac{\sqrt{5}\sin\theta}{2\cos\theta}=0,\quad 1-\frac{5}{4}(1+\tan^2\theta)+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta=0$$

まとめると，

$$5\tan^2\theta-2\sqrt{5}\tan\theta+1=0,\quad (\sqrt{5}\tan\theta-1)^2=0$$

よって，$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ である。

コメント

難易度が高いというわけではありませんが，それなりに時間のかかる問題です。(2)では，まずパラメータ θ を動かし，その後，パラメータ t を動かして通過領域を求めました。

問　題

座標平面上に直線 $l : x\sin\theta + y\cos\theta = 1\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がある。不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x\sin\theta + y\cos\theta \geqq 1$ が表す領域を D, 不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x\sin\theta + y\cos\theta \leqq 1$ が表す領域を D' とする。

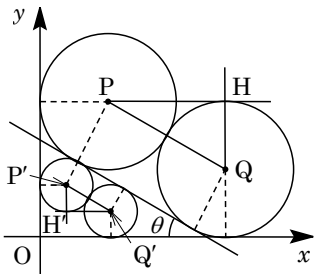
D 内に半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 を, C_1 は l と y 軸に接し, C_2 は l と x 軸に接し, さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる。また D' 内に半径 r の 2 つの円 C_1', C_2' を, C_1' は l と y 軸に接し, C_2' は l と x 軸に接し, さらに C_1' と C_2' が外接するようにとる。

(1)　$\dfrac{r}{R}$ を θ で表せ。

(2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から, 直線 $l : x\sin\theta + y\cos\theta = 1$ の上向きの法線ベクトルの成分を $(\sin\theta,\ \cos\theta)$ とすることができるので, これより l の右向きの方向ベクトルの成分は $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ となる。



さて, 半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ P, Q とおき, P を通り x 軸に平行な直線と, Q を通り y 軸に平行な直線との交点を H とおくと, $\mathrm{PQ} = 2R$, $\angle\mathrm{QPH} = \theta$ となる。

すると, 点 P の座標は $\mathrm{P}(R,\ 2R\sin\theta + R)$ となり, 直線 l との距離が R なので,

$$\frac{R\sin\theta + (2R\sin\theta + R)\cos\theta - 1}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = R$$

$R(\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta) - 1 = R$ より, $R = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}$

同様にして, 図のように点 P′, Q′, H′ を設定すると, $\mathrm{P}'(r,\ 2r\sin\theta + r)$ となり,

$$\frac{-\{r\sin\theta + (2r\sin\theta + r)\cos\theta - 1\}}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = r$$

$-r(\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta) + 1 = r$ より, $r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 1}$

以上より, $\dfrac{r}{R} = \dfrac{\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 1}$

(2)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと, $t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ より, $2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$

また, $t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ となり, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $1<t \leqq \sqrt{2}$ である。

ここで, $\dfrac{r}{R} = f(t)$ とおくと, (1)より,

$$f(t)=\frac{t+t^2-2}{t+t^2}=1-\frac{2}{t+t^2}$$

すると，$1<t\leqq\sqrt{2}$ で，$f'(t)=\dfrac{2(2t+1)}{(t+t^2)^2}>0$ より，$f(t)$ は単調増加し，

$$f(1)<f(t)\leqq f(\sqrt{2})$$

よって，$f(1)=0$，$f(\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$ より，$0<\dfrac{r}{R}\leqq-1+\sqrt{2}$ である。

コメント

(1)はいろいろな解法が考えられます。最初に考えたのは，直線 l の x 切片と y 切片の間の距離を R と θ で表すものでした。しかし，計算が複雑になりすぎ，次に考えたのが上に記した解法です。