２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

広島大学

理系数学 25か年

１９９９ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策

広 島 大 学

理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1999 年度以降に出題された広島大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1, 2,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　原点を O とする座標平面上の 2 点 A(3, 0)，B(1, 1) を考える。α，β を実数とし，点 P(α, β) は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないものとする。直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 Q および点 R の座標を，α，β を用いて表せ。

(2)　直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 S の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(3)　直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 T の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(4)　α，β は(2)と(3)の両方の条件を満たすとし，S, T は(2), (3)で定めた点であるとする。このとき，直線 OA と直線 BS が垂直となり，直線 OB と直線 AT が垂直となる α，β の値を求めよ。　[2023]

2　a を正の実数，t を $0<t<1$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 A(0, a)，B(−1, 0)，C(1, 0) を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が I(0, t) であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　∠IBC を θ とおく。t と a を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2)　a を t を用いて表せ。

(3)　△ABC の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ。

(4)　△ABC の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ。

(5)　△ABC の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ。　[2022]

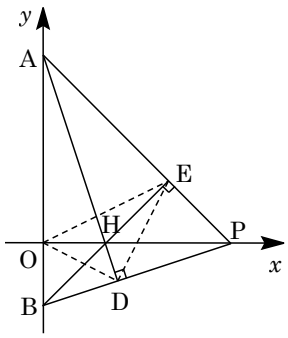
3　座標平面において，2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上にそれぞれ点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする。このとき，B の座標を求めよ。

(2)　放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする。このとき，D の座標を求めよ。

(3)　B, D はそれぞれ(1), (2)で定めたものとする。このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ。　[2021]

4　原点を O とする座標平面上において，点 $\mathrm{A}(0,\ 3)$，$\mathrm{B}(0,\ -1)$ および x 軸上の正の部分を動く点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ があり，$\angle\mathrm{APB}$ は鈍角でないとする。$\triangle\mathrm{ABP}$ の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを，三角形の垂心という。



(1)　$\angle\mathrm{APB}$ が直角となる t の値を求めよ。

(2)　点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では，t が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3)　点 H が $\triangle\mathrm{ODE}$ の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

(4)　$\triangle\mathrm{ODE}$ の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ。

(5)　(4)で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ。ただし，最大値を与える t の値を求める必要はない。　[2019]

5　次の問いに答えよ。

(1)　次の条件(A)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(A)　2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(2)　次の条件(B)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(B)　2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(3)　座標平面上の点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲の面積を求めよ。　[2018]

6　座標平面上で，曲線$C: y=x^3-3x$と，$b>a^3-3a$を満たすように動く点$\mathrm{P}(a,\ b)$を考える。また，点 P に対し，2 つの不等式 $|x-a|\leqq 1$，$|y-b|\leqq 1$によって表される座標平面上の領域を B とする。領域 B と曲線 C に対して，B と C が共有点 Q をもち，さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき，B と C は点 Q で接するということにする。次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形をかき，さらに点 P の座標が$(-2,\ 3)$のときの領域 B を図示せよ。

(2)　B と C が$x<-1$の範囲にある点で接するように，点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(3)　B と C がある点で接するように点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(4)　(3)の点 P の軌跡は，ある関数$y=f(x)$のグラフで表すことができる。この$f(x)$は$x=0$で微分可能であることを示せ。　[2018]

7　座標平面上の 2 点$\mathrm{A}(0,\ 1)$　$\mathrm{B}(t,\ 0)$を考える。ただし，$t\geqq 0$とする。次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3)　k を定数とする。点 B と直線$y=kx$上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。　[2013]

8　座標平面上の 3 点 A$(0,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(x,\ y)$を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　△ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき $x,\ y$ が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2)　△ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき $x,\ y$ が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3)　3 つの角 ∠CAB，∠ABC，∠BCA をそれぞれ α，β，γ とし，不等式 $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。そのとき $x,\ y$ が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4)　x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。　[2009]

9　次の問いに答えよ。

(1)　点$(3,\ 3)$における円 $x^2+y^2-4x-2y=0$ の接線の方程式を求めよ。

(2)　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y,\quad \log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5$$

(3)　a を正の数とする。点$(x,\ y)$が(2)で求めた領域を動くとき，$ax+y$ の最大値が 4 になるように a の値を定めよ。　[2004]

■ 図形と計量

1　a, b を正の定数とする。$0<\theta<\pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の 3 つの条件(i), (ii), (iii)を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i)　$\mathrm{PA}=a$，$\mathrm{PB}=b$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ である。

(ii)　2 点 C, D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある。

(iii)　$\mathrm{AB}=3\mathrm{AD}$ である。

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

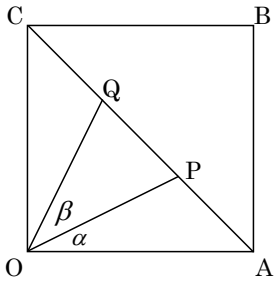
(1)　辺 AB の長さを a, b, θ を用いて表せ。

(2)　S を a, b, θ を用いて表せ。

(3)　θ が $0<\theta<\pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする。M を a, b を用いて表せ。また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4)　$a=16$，$b=25$ とする。また，β を(3)で定めた値とする。$\theta=\beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ。　[2020]

2　正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする。また，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるようにとる。このとき，比 AR : RC を求めよ。　[2006]

■ ベクトル

1　空間内の 6 点 A, B, C, D, E, F は 1 辺の長さが 1 の正八面体の頂点であり，四角形 ABCD は正方形であるとする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{b}\cdot\vec{d}$，$\vec{b}\cdot\vec{e}$，$\vec{d}\cdot\vec{e}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=p\vec{b}+q\vec{d}+r\vec{e}$ を満たす実数 p, q, r の値を求めよ。

(3)　辺 BE を $1:2$ に内分する点を G とする。また，$0<t<1$ を満たす実数 t に対し，辺 CF を $t:(1-t)$ に内分する点を H とする。t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△AGH の面積が最小となる t の値とそのときの△AGH の面積を求めよ。　[2023]

2　座標空間に 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(s,\ s,\ s)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ がある。ただし，$s>0$ とする。$t,\ u,\ v$ を実数とし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u, v を s を用いて表せ。

(3)　(2)のとき，2 点 D, E を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ。　[2016]

3　座標空間内に 5 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \frac{3}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}(s,\ t,\ 0)$，$\mathrm{D}(0,\ u,\ 0)$ がある。ただし，s, t, u は実数で，$s>0$，$t>0$，$s+t=1$ を満たすとする。3 点 A, B, C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ。

(2)　u を t を用いて表せ。また，$0<u<1$ であることを示せ。

(3)　点 $(0,\ 1,\ 0)$ を E とする。点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき，t の値を求めよ。　[2015]

4　四面体 OABC において $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ とする。△OAB の重心を F，△OAC の重心を G とし，辺 OA の中点を M とする。また，$\angle\mathrm{BOC}=2\theta$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{FG}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ。

(3)　△MBC の面積を θ を用いて表せ。　[2014]

5　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件 $(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直であることを証明せよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|$ を θ を用いて表せ。

(3)　三角形 ABC の周の長さ $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}$ を最大にする θ を求めよ。　[2012]

6　平面上で，線分 AB を $1:2$ に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3)　PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ。

(4)　$\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=2$ とする。$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ。　[2011]

7　四面体 OABC において $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=1$ とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s, t を用いて $\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表される。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ を満たすとき，s, t の値を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q，直線 BP と直線 AC の交点を R とする。$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$ および $\mathrm{AR}:\mathrm{RC}$ を求めよ。

(4)　(2)の条件を満たす点 P について，3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ。　[2009]

8　座標空間の 2 点 A(2, 0, 0)，B(0, −1, 0)，および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$，$\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2)　上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 C(0, 0, c) を求めよ。

(3)　上で求めた点 P と C に対し，P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

[2007]

9　OA = OB を満たす二等辺三角形 OAB において，頂点 A, B からそれぞれの対辺またはその延長上に引いた 2 つの垂線の交点を G，辺 AB の中点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおく。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす s, t を θ を用いて表せ。

(2)　点 G が三角形 OAB の外部または周上にあるときの θ の値の範囲を求めよ。

(3)　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}$ の値の範囲を求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1　a, b を整数とする。また，整数の数列 $\{c_n\}$ を $c_1=a$，$c_2=b$ および漸化式

$$c_{n+2}=c_{n+1}+c_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a=39$，$b=13$ とする。このとき，2 つの整数 c_5 と c_6 の最大公約数を求めよ。

(2)　a と b はともに奇数であるとする。このとき，自然数 n に対して次の命題 P_n が成り立つことを，n についての数学的帰納法で示せ。

P_n : c_{3n-2} と c_{3n-1} はともに奇数であり，c_{3n} は偶数である。

(3)　d を自然数とし，a と b はともに d の倍数であるとする。このとき，自然数 n に対して c_n が d の倍数になることを示せ。ただし，数学的帰納法を用いて証明すること。

(4)　c_{2022} が奇数であるならば，$a+b$ も奇数であることを示せ。　[2022]

2　a, b, c を実数とし，2 次方程式 $x^2+x-(c-1)=0$ が実数解 α, β $(\alpha<\beta)$ をもつとする。さらに，2 つの等式 $a+b=c^2$，$a\alpha+b\beta+c=0$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　α, β および $b-a$ を，それぞれ c を用いて表せ。

以下において，a, b, c は自然数とする。

(2)　$\sqrt{4c-3}$ が自然数でないとき，自然数 a, b, c の組を求めよ。

(3)　自然数 s を用いて，$4c-3=s^2$ と表せるとき，s と a は等式

$$s^5-s^4+6s^3+2s^2+(9-32a)s=-15$$

を満たすことを示せ。

(4)　(3)のとき，自然数 a, b, c の組をすべて求めよ。　[2021]

3　$a>0$，$r>0$ とし，数列 $\{a_n\}$ を初項 a, 公比 r の等比数列とする。また，数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される。

$$b_1=a_1,\ b_{n+1}=b_na_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　b_n を a, r および n を用いて表せ。

(2)　一般項が $c_n=\dfrac{\log_2 b_n}{n}$ である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。

(3)　(2)で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち，$M_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_k$ とする。このとき，一般項が $d_n=2^{M_n}$ である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ。　[2019]

4　x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および $\mathrm{A}(50,\ 14)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P を 1 つ求めよ。

(2)　m を自然数とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする。P_1 および P_2 を求めよ。

(3)　P_m を(2)で定めた格子点とする。自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ。

(4)　P_m を(2)で定めた格子点とする。Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする。四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。　[2017]

5　数列 $x_n = 2^n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を考える。この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, …であるが，各項の下 1 桁をみると，1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, …となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である。次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすとする。たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする。

(2)　4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ。

(3)　8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ。

(4)　数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい。　[2016]

6　$\alpha > 1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_1 = \alpha$，$a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n + 1}}$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a_n > 1$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$\sqrt{x} - 1 \leqq \dfrac{1}{2}(x - 1)$（ただし，$x \geqq 0$ とする。）

(3)　$a_n - 1 \leqq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha - 1)$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　[2014]

7　座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし，連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x + y \leqq n$ の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a - c| + |b - d| = 1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

(1)　領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(2)　領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

(3)　領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき，互いに隣接点である確率を求めよ。ただし，異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。　[2013]

8　a を実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$ とおく。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\ x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n について $x_n=a$ となるとき，a を求めよ。

(2)　$a<1$ のとき，$x_n<1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

[2012]

9　4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち，

$$A=\{4k+1 \mid k\text{は}0\text{以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1)　x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2)　0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ。

(3)　$m,\ n$ を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4)　$m,\ n$ を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。　[2010]

10　平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は，その大きさがともに $\sqrt{2}$ であり，なす角が $120°$ である。このとき，次の問いに答えよ。

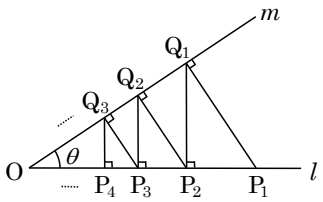
(1)　内積 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ を求めよ。

(2)　$k,\ l$ を整数とするとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は偶数であることを示せ。

(3)　(2)で，k または l が奇数のとき，$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではないことを示せ。

(4)　$m,\ n$ が整数であり，$m=n=0$ ではないならば，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ は整数ではないことを示せ。　[2008]

11　右図のように，点 O から出る 2 本の半直線 l, m があり，l と m のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。l 上に $\mathrm{OP_1}=1$ となるように点 $\mathrm{P_1}$ を定め，$\mathrm{P_1}$ から m に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を下ろし，$\mathrm{Q_1}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_1P_2}$ を下ろし，$\mathrm{P_2}$ から m に垂線 $\mathrm{P_2Q_2}$ を下ろし，$\mathrm{Q_2}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_2P_3}$ を下ろす。同様にくりかえして，点 P_n，Q_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を定め，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\dfrac{\mathrm{P_2Q_2}}{\mathrm{P_1Q_1}}$ を求めよ。

(2)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3)　$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求め，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ。

(4)　(3)で求めた S を θ の関数と考えて，S の最大値を求めよ。ただし，その最大値を与える θ の値は求めなくてよい。　[2008]

12　条件 $a_1=-30$，$9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　$b_n=3^n a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。

(3)　a_n を最大にする n の値を求めよ。　[2002]

13　1 から 100 までの自然数が 1 つずつ書いてある 100 枚のカードと, 1 から 100 までの番号が 1 つずつついている 100 個の箱がある。100 のカードをまず 1 番の箱に入れ, 次に 99, 98 のカード 2 枚を 2 番の箱に入れ, さらに, 97, 96, 95 のカード 3 枚を 3 番の箱に入れる。以下, この操作を続けて, k 番目の箱に k 枚のカードを数の大きい方から順に入れていく。ただし, 1 のカードを入れた段階でこの操作は終了するものとする。したがって, 1 のカードの入っている箱には箱の番号と同じ枚数のカードが入っていない可能性がある。1 のカードが入っている箱の番号を N とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　N の値を求めよ。また, N 番の箱には何枚のカードが入っているか。

(2)　k 番 $(1 \leqq k \leqq N)$ の箱において, その箱の中のカードに書かれている最大の数を k の式で表せ。

(3)　k 番 $(1 \leqq k \leqq N)$ の箱の中のカードに書かれている数の合計を S_k とする。$1 \leqq k \leqq N-1$ のとき, S_k を k の式で表せ。また, $1 \leqq k \leqq N$ のとき, S_k の最大値を求めよ。　[2000]

■ 確率

1　箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし, N は 4 以上の自然数である。「この箱からカードを 1 枚取り出し, 書かれた番号を見てもとに戻す」という試行を考える。この試行を 4 回繰り返し, カードに書かれた番号を順に X, Y, Z, W とする。次の問いに答えよ。

(1)　$X = Y = Z = W$ となる確率を求めよ。

(2)　X, Y, Z, W が 4 つの異なる番号からなる確率を求めよ。

(3)　X, Y, Z, W のうち 3 つが同じ番号で残り 1 つが他と異なる番号である確率を求めよ。

(4)　X, Y, Z, W が 3 つの異なる番号からなる確率を求めよ。　[2023]

2　n を自然数とする。袋の中に赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個，合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている。また，空箱 A，B，C，D，E，F が用意されている。この準備の下で試行 1，試行 2 を順に行う。

試行 1　袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる。箱 A に入れた玉が白玉ならば $i=0$，赤玉ならば $i=1$ とおく。

試行 2　次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱 B に入れる。この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は $(3-i)$ 個，白玉は $(4+i)$ 個である。この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる。

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A，B，C の玉をすべて元通り袋に戻す。そして次の試行 3 を行う。

試行 3　袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる。次に，袋から玉を n 個取り出して，箱 E に入れる。最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ。また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ。

(2)　試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率 q_{A} を n を用いて表せ。また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_{C} を n を用いて表せ。

(3)　試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする。事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X\cap Y)$ を n を用いて表せ。また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y\cap Z)$ を n を用いて表せ。

(4)　(3)の事象 Y が起こったとき，(3)の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3)の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ。　[2022]

3　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c とする。また，$f(x)=(-1)^a x^2+bx+c$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$b^2>4c$ である確率を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ。

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，$f'(1)=7$ である条件付き確率を求めよ。

(4)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，少なくとも 1 つが正の解である条件付き確率を求めよ。　[2021]

4　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目を a_1，2 回目に出た目を a_2，3 回目に出た目を a_3 とする。次に，1 枚の硬貨を 3 回投げる。$k=1,\ 2,\ 3$ に対し，k 回目に表が出た場合は $b_k=1$，裏が出た場合は $b_k=a_k$ とおく。ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a_1+a_2+a_3=7$ である確率を求めよ。

(2)　$b_1=1$ である確率を求めよ。

(3)　$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a}=(1,\ 1,\ 5)$ である条件付き確率を求めよ。

(4)　$\vec{b}=(1,\ 1,\ 1)$ であったとき，$a_1+a_2+a_3=7$ である条件付き確率を求めよ。

[2020]

5　箱の中に 1 から N までの数が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし，N を 2 以上の自然数とする。「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し，そのカードに書かれた数を読み取り，そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す。1 回目，2 回目，3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を，それぞれ a_1，a_2，a_3，a_4 とする。また，座標平面上に 4 点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{P}_3(a_1-a_3,\ a_2)$，$\mathrm{P}_4(a_1-a_3,\ a_2-a_4)$ を定める。次の問いに答えよ。

(1)　P_4 が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ。

(2)　P_4 が連立不等式 $x \geqq 0$，$y \leqq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ。

(3)　P_4 が直線 $y=x$ 上にある確率を N を用いて表せ。

(4)　$N=2^m$ とする。ただし，m を自然数とする。P_4 が原点 O に一致し，かつ，四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ。　[2019]

6　0, 1, 2, 3 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し，書かれた数字を見て元に戻す。この操作を N 回繰り返し，カードに書かれた数字を順に Z_1，Z_2，…，Z_N とする。ここで，N は 3 以上の自然数である。さらに，複素数 $\alpha=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ を用いて，項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1=\alpha^{Z_1},\ X_{n+1}=X_n\alpha^{Z_{n+1}}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

により定める。$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ に対し，$X_n=\alpha$ となる確率を P_n とし，$X_n=\alpha^2$ となる確率を Q_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_1 を求めよ。

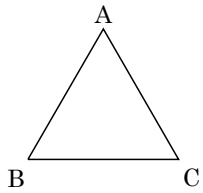
(2)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ とする。$\alpha^{Z_{n+1}}=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ とする。$X_n=1$ となる確率を，P_n と Q_n を用いて表せ。

(4)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$ に対し，P_n を用いて P_{n+1} を表せ。

(5)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ に対し，P_n を求めよ。　[2018]

7　表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし，$0<p<1$ である。このとき，右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

R は最初 A にあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで，N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_2，P_3 を求めよ。

(2)　P_{2m}，P_{2m+1} $(2\leqq m\leqq N+1)$ を求めよ。

(3)　$p=\frac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。　[2017]

8　xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし，点 $(3,\ 1)$ に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ。

(2)　$(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ。

(3)　$x_8+y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_{4n}+y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

[2016]

9　m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m \geqq 2$，$n \geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ とする。3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3)　$n \geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば，$n=3$ のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は，

$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\}$，

$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\}$，$\{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$

の 5 通りであるので，$p_3=\dfrac{3}{5}$ である。

(4)　(3)の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の値の範囲を求めよ。　[2015]

10　1 辺の長さが 1 の正六角形において，頂点を反時計回りに P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする。1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に j, k とする。P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となるとき，この 3 点を頂点とする三角形の面積を S とする。P_1，P_j，P_k が異なる 3 点とならないときは，$S=0$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$S>0$ となる確率を求めよ。

(2)　S が最大となる確率を求めよ。

(3)　S の期待値を求めよ。　[2014]

11　n は自然数とし，点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする。

規則：(A)　P は，はじめに点 $(1,\ 2)$ にある。

(B)　さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに $120°$ 回転し，3 以上の目が出れば時計回りに $60°$ 回転する。

(C)　(B)を n 回繰り返す。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，出た目が 4，1，2 であったとする。このとき P が最後に移った点の座標を求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，P が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。

(3)　$n=6$ のとき，P が点 $(-1,\ -2)$ にある確率を求めよ。

(4)　$n=3m$ のとき，P が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。ただし，m は自然数とする。

[2012]

12　△ABC の頂点は反時計回りに A，B，C の順に並んでいるとする。点 A を出発した石が，次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り，裏がでたときは動かない。なお，コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とする。

コインを n 回投げたとき，石が点 A，B，C にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，b_1，c_1 の値を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。また，a_2，b_2，c_2 および a_3，b_3，c_3 の値を求めよ。

(3)　a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値が一致することを証明せよ。

(4)　(3)において一致する値を p_n とする。p_n を n で表せ。　[2011]

13　n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す。この試行を A, B, C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば，A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人 $(k=1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2)　$n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3)　勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。

(4)　$P_n(1) \geqq 0.9$ となる最小の n を求めよ。　[2010]

14　2 人のプレーヤーA, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は $1-p$ であるとする(ただし $0<p<1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1)　P_4 を求めよ。

(2)　P_{2n-1} を求めよ。

(3)　P_{2n} を求めよ。

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。

(5)　$S=\lim_{n\to\infty} S_n$ とする。p と S の大小関係を調べよ。　[2009]

15　2 点 A, B と，その上を動く 1 個の石がある。この石は，時刻 $t=0$ では点 A にあり，その後，次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各 $t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

(a)　時刻 t に石が点 A にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は c，点 B にある確率は $1-c$ である。

(b)　時刻 t に石が点 B にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $2c$，点 A にある確率は $1-2c$ である。

ただし，c は $0<c<\dfrac{1}{2}$ を満たす定数とする。

いま，n を自然数とし，時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。

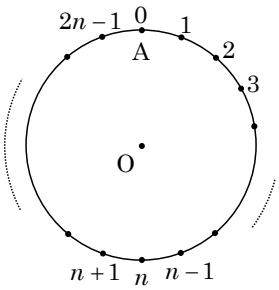
(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と c を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。　[2008]

16　n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方，袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りをもつ 2 点をとる。2 点のうち目盛りの大きい方を B，目盛りの小さい方を C として，△ABC を考える。次の問いに答えよ。



(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。

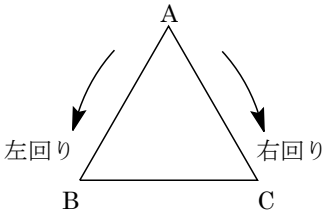
(2)　△ABC の辺上に点 O がある確率を求めよ。

(3)　△ABC の内部に点 O がある確率は $\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

(4)　△ABC の辺上に点 O があるとき $X=1$，△ABC の内部に点 O があるとき $X=2$，それ以外のとき $X=0$ とする。X の期待値を求めよ。　[2007]

17　2 枚のコインを同時に投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

2 枚とも表が出たとき左回りで隣りの頂点に移し，
2 枚とも裏が出たとき右回りで隣りの頂点に移し，
表と裏が出たとき動かさない



という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。この試行を n 回繰り返したとき，1 回目の試行後の駒の位置を X_1，2 回目の試行後の駒の位置を X_2，…，n 回目の試行後の駒の位置を X_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　この試行を 2 回繰り返したとき，X_2 が A である確率 P_2 を求めよ。

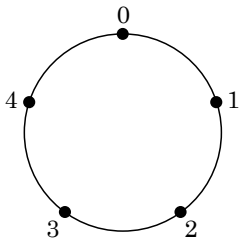
(2)　この試行を 4 回繰り返したとき，最後の X_4 のみが A である確率 Q_4 を求めよ。

(3)　この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したとき，最後の X_n のみが A である確率 Q_n を求めよ。

(4)　この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したとき，X_n が A である確率 P_n を求めよ。

[2005]

18　円周を 5 等分して図のように 0 から 4 の目盛りをふる。初めに点 P を目盛り 0 の位置に置く。硬貨を 1 回投げるごとに，表が出れば，点 P を右回りに 2 目盛り動かし，裏が出れば，点 P を左回りに 1 目盛り動かすという操作をくり返し行う。硬貨を n 回投げた後，点 P が目盛り i の位置にある確率を $p_n(i)$ と表す。



(1)　$p_2(1)$，$p_3(2)$，$p_3(3)$ を求めよ。

(2)　硬貨を 4 回投げて，点 P が初めて目盛り 2 の位置で止まる確率を求めよ。

(3)　$p_{n+1}(0) = \dfrac{1}{2}\{p_n(3) + p_n(1)\}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(4)　z を $z^5 = 1$ を満たす複素数とする。すべての自然数 n に対して，

$\displaystyle\sum_{i=0}^{4} p_n(i) z^i = \frac{(z^2 + z^{-1})^n}{2^n}$ が成り立つことを示せ。　[2004]

19　xy 平面上を移動する点 P を考える。はじめに，点 P は原点にあるとする。4 枚のカードに上，下，左，右の 4 つの文字を 1 つずつ書いて，それらを袋に入れておく。

1 枚のカードを取り出し，カードに書かれた文字の方向に 1 だけ点 P を移動させて，取り出したカードを袋に戻す，という試行をくり返す。上，下，左，右と書かれたカードは，それぞれ同じ確からしさで取り出されるものとする。

(1)　上，上，下，左，右，右，右の 7 文字すべてを 1 列に並べてできる文字列は何通りあるか。

(2)　この試行を 7 回くり返したときに，点 P が座標 $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3)　この試行を 5 回くり返したときに，点 P が x 軸上にある確率を求めよ。

(4)　この試行を 2 回くり返したときの点 P の座標を $(X,\ Y)$ とする。$|X-Y|$ の期待値を求めよ。　[2002]

20　A, B, C の 3 人が優勝決定戦を行う。まず 3 人のうち 2 人が対戦し，その勝者が残りの 1 人と対戦する。これをくり返して，2 回続けて勝ったものを優勝者とする。A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とし，C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は $p\,(0<p<1)$，負ける確率は $1-p$ であるとする。第 1 回戦は A と B の対戦として次の問いに答えよ。

(1)　第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの C と対戦する。C が負ければ勝者は優勝者となるが，C が勝てば C は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う。第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると，ACC と BCC の 2 通りの順列が得られる。第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ。

(2)　第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする。F_2，F_3，F_4 をそれぞれ求めよ。

(3)　2 以上の自然数 n に対して，確率 F_{3n} を求めよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$ を計算せよ。　[2001]

21　1 つのさいころを n 回投げる試行において，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目がちょうど k 回 $(0\leqq k\leqq n)$ 出る確率を p_k とする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，p_1 を求めよ。

(2)　$p_k\ (0\leqq k\leqq n)$ を n と k の式で表せ。また，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q を求めよ。

(3)　$n=3m+2$ (m は自然数)とする。$0\leqq k\leqq n-1$ のとき，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}\leqq 1$ となる k の範囲を求めよ。さらに，$0\leqq k\leqq n$ のとき，p_k が最大となる k を求めよ。　[2000]

■ 論証

1　次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ。

(2)　$p,\ q$ を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。　[2011]

2　以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1)　微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(2)　n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

[2009]

3　$f(x)=\dfrac{8x+21}{3x+8}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ であることを示せ。

(2)　$x \geqq 0$ ならば $f(x) \geqq 2$ であることを示せ。

(3)　$x \geqq 2,\ y \geqq 2$ ならば，$|f(x)-f(y)| \leqq \dfrac{|x-y|}{100}$ となることを示せ。

(4)　$x \geqq 2$ ならば，$\left|f(f(x))-\sqrt{7}\right| \leqq \dfrac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$ となることを示し，これを用いて，$|r-\sqrt{7}|<10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ。　[2007]

4　n が自然数のとき，次の不等式を証明せよ。ただし，$a>0$ とする。

(1)　$(a+1)^n \geqq a^n + na^{n-1}$

(2)　$(n+1)^n \geqq 2n^n$

(3)　$n! \leqq 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$　[1999]

■ 複素数

1　i を虚数単位とする。$z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し，$w = \dfrac{z-i}{z+1}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$z \neq -1$ のとき $w \neq 1$ であることを示せ。また，$w \neq 1$ のとき，z を w を用いて表せ。

(2)　t を -1 と異なる実数とする。複素数平面において，実部が t である複素数全体の描く直線を l_t とおく。点 z が直線 l_t 上を動くとき，点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く。この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ。

(3)　P_t を(2)で定義した点とする。t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を，複素数平面上に図示せよ。　[2020]

2　i を虚数単位とし，複素数 z に対して，$w = z^2 + 2z + 1 - 2i$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ。

(2)　$w = 0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し，それぞれを $a + bi$（a, b は実数）の形に書き表せ。

(3)　(2)で求めた 2 つの複素数のうち実部の大きい方を α，実部の小さい方を β とし，対応する複素数平面上の点をそれぞれ A, B とする。また，線分 AB の中点を M とする。複素数 z に対応する複素数平面上の点が，線分 AM 上（両端を含む）を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4)　複素数 z に対応する複素数平面上の点が，点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき，複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。　[2019]

3　複素数平面上の 4 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$，$\mathrm{D}(\delta)$ を頂点とする四角形 ABCD を考える。ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が 180° より小さい四角形（凸四角形）であるとする。また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に，4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

(1)　点 P を表す複素数を求めよ。

(2)　四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ。

(3)　四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ。　[2018]

4　複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である。
2. 時刻 1 に P は $\mathrm{Q}_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に，時刻 n に P は $\mathrm{Q}_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　z_3，z_4 を求めよ。

(2)　z_n を α，n を用いて表せ。

(3)　P が $\mathrm{Q}_1(z_1)$，$\mathrm{Q}_2(z_2)$，…と移動するとき，P はある点 $\mathrm{Q}(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4)　z_n の実部が(3)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

[2016]

5　正の実数 a, b, c を係数とする 3 次方程式

$$(*)\quad x^3+ax^2+bx+c=0$$

が，純虚数の解をもつとする。次の問いに答えよ。

(1)　$ab-c$ の値を求めよ。

(2)　複素数平面上で方程式 $x^3+8=0$ の 3 個の解が表す点を頂点とする三角形を考える。方程式(＊)の解が表すすべての点がこの三角形の頂点または辺上にあるとき a, b, c の値を求めよ。　[2005]

6　複素数平面上で不等式 $2|z-2| \leqq |z-5| \leqq |z+1|$ を満たす点 z が描く図形を D とする。

(1)　D を図示せよ。

(2)　点 z が D 上を動くものとする。$\arg z=\theta$ とするとき，$\tan\theta$ の値のとりうる範囲を求めよ。

(3)　D の面積を求めよ。　[2004]

7　θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，複素数平面において $0 \leqq \arg z \leqq \pi-\theta$ を満たすすべての点 $z(\neq 0)$ と点 0 からなる集合を D とする。

(1)　複素数平面上に D を図示せよ。

(2)　a を $a>0$ を満たす実数とする。このとき，D に属する点 z に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。　$|z|\sin\theta \leqq |z+a|$

また，等号が成り立つときの z を a，θ を用いて表せ。　[2003]

8　l を複素数平面上の直線 $z=t(1+i)$ (t は実数)，α，β を複素数とする。ただし，点 α は l 上にないとする。

(1)　$\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ ならば，l 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ であることを示せ。

(2)　l 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ ならば，$\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ であることを示せ。

(3)　l 上に異なる 2 定点 z_1，z_2 があって，$\dfrac{\overline{z_1}-\beta}{z_1-\alpha}$ と $\dfrac{\overline{z_2}-\beta}{z_2-\alpha}$ が同じ複素数になるとする。この複素数を γ とおくとき，l 上のすべての点 z に対し $\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}=\gamma$ となることを示せ。また γ の値を求めよ。　[2002]

9　z は $0° < \arg z < 90°$ を満たす複素数とし，複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$ を頂点とする△OAB を考える。また，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく。

(1)　$\alpha^2 - \alpha + 1$ の値を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{P}(w)$ を，直線 OB に関して点 A と反対側に，△POB が正三角形になるようにとる。複素数 w を z と α を用いて表せ。

(3)　点 $\mathrm{Q}(z + \alpha - \alpha z)$ に対し，△ABQ は正三角形であることを示せ。

(4)　$\arg\left(\dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}\right)$ を求めよ。ただし，偏角の範囲は，0° 以上 360° 未満とする。

[2001]

10　複素数平面上に，3 点 $\mathrm{A}(-2i)$，$\mathrm{B}(1-i)$，$\mathrm{C}(-1+3i)$ と，点 $\mathrm{D}(1+i)$ を中心とする半径 1 の円 K がある。点 $\mathrm{P}(z)$ は K の周上にあり，点 $\mathrm{Q}(w)$ は，三角形 APQ と三角形 ABC が同じ向きに相似になる点とする(すなわち，AP : AQ = AB : AC で，AP から AQ に反時計まわりに測った角が，AB から AC に反時計まわりに測った角に等しい)。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　w を z の式で表せ。

(2)　点 P が円 K の周上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2000]

■ 曲線

1　座標平面において，O(0, 0)，A(4, 0)，P(3, 0) とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする△OAB を考える。ただし，円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

(1)　OB と AB の差は一定であることを証明せよ。

(2)　円 C の半径を r とするとき，r のとる値の範囲を求めよ。

(3)　r が(2)の範囲で変化するとき，点 B の軌跡の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。　[2021]

2　$0<b<a$ を満たす定数 a, b に対し，2 つの楕円 $A:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$B:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ を考える。また α，β は，$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(2)　2 つの楕円 A, B の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。

(3)　楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x\geqq 0$, $y\geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を a, b, β を用いて表せ。　[2007]

3　C を曲線 $a^2x^2+y^2=1$，l を直線 $y=ax+2a$ とする。ただし，a は正の定数である。

(1)　C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2)　C 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めよ。

(3)　(1)における交点を P, Q とし，点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とする。a が(1)の範囲を動くとき，X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ。　[2002]

■ 極限

1　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\left(\dfrac{n^6(n+1)}{a_n{}^3}\right)^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。また，$b_n=\log_2\dfrac{a_n}{n^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。次の問いに答えよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_2 n}{6^{2n}}=0$ であることを用いてよい。

(1)　b_1，b_2 を求めよ。

(2)　数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 k=0$ であることを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6^{2n}}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_{2k}$ を求めよ。　[2023]

2　次の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ。

(2)　関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{2}^{\,x}$ と定義し，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。C 上の点 $(2,\ f(2))$ における接線の方程式を，実数 $m,\ k$ を用いて $y=mx+k$ と表すとき，m と k の値をそれぞれ求めよ。

(3)　$f(x)$ および m と k を(2)のように定める。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq mx+k$ が成り立つことを示せ。

(4)　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1}=\sqrt{2}^{\,a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定義する。自然数 n に対して，$2-a_{n+1}\leqq(\log 2)\cdot(2-a_n)$ が成り立つことを示し，極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。必要ならば，自然対数の底が $e=2.718\cdots$ であることを用いてよい。　[2022]

3　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a_2=\tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3=\tan\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ。

(2)　一般項 a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}2^n a_n$ を求めよ。　[2017]

4　座標平面上の放物線 $C_n : y=x^2-p_nx+q_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を考える。ただし，p_n，q_n は，${p_1}^2-4q_1=4$，${p_n}^2-4q_n>0$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を満たす実数とする。C_n と x 軸との 2 つの交点を結ぶ線分の長さを l_n とする。また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は，$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　C_n の頂点の y 座標を l_n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$p_n=n\sqrt{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\lim_{n\to\infty}n\log\left(-\dfrac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数である。　[2015]

5　a, b, p は $a>0$, $b>0$, $p<0$ を満たす実数とする。座標平面上の 2 曲線 $C_1: y=e^x$, $C_2: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。ただし, e は自然対数の底である。C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し, その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき, 次の問いに答えよ。

(1)　p を a を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ。　[2015]

6　$a_1=2$, $a_2=1$ と $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ。

(1)　$b_n=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とするとき, 数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であることを示せ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k$ を n の式で表せ。

(3)　a_n を n の式で表せ。

(4)　数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ の収束, 発散を調べ, 収束する場合はその極限値を求めよ。　[2006]

7　数列 $\{a_n\}$ は, 関係式

$$a_1=2,\ (a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n),\ a_{n+1}>a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定まっている。

(1)　a_2, a_3, a_4 を計算せよ。

(2)　一般項 a_n を n の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$ を求めよ。　[2001]

■ 微分法

1　a を実数とする。関数 $f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{2a+1}{2}x^2-ax$ が $x=a$ で極大値をとるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の満たす条件を求めよ。

(2)　次の不等式を解け。　$|x+1|+|x-2|\leqq 4$

(3)　x が(2)の範囲を動くとき，$f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。　[2021]

2　関数 $f(x)=xe^{-2x^2}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ。また，極大値をとるときの x の値，および極小値をとるときの x の値を求めよ。

(2)　$a>0$ とし，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える。また，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を l_t とおく。l_t が点 A を通るような実数 t がちょうど 2 つあるとする。このとき，a の値を求めよ。さらに，その 2 つの t の値を p, q（ただし，$p<q$）とおくとき，p, q を求めよ。

(3)　q を(2)で定めた値とする。曲線 $y=f(x)$，直線 $x=q$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2020]

3　$a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(t)=t^3-2at+1$ の区間 $t\geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3)　座標平面上の曲線 $y=x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4)　座標平面において，点 P が曲線 $y=x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

4　2 つの関数 $f(x)=x\sin x$，$g(x)=\sqrt{3}x\cos x$ について，次の問いに答えよ。ただし，(3)と(4)において，a および $h(x)$ は(2)で定めたものとする。

(1)　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点のうち，x 座標が $-\pi \leqq x \leqq \pi$ であるものをすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた共有点のうち，x 座標が正である点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。点 A における曲線 $y=g(x)$ の接線を $y=h(x)$ と表す。$h(x)$ を求めよ。

(3)　$0 \leqq x \leqq a$ のとき，$h(x) \geqq g(x)$ であることを示せ。

(4)　$0 \leqq x \leqq a$ の範囲において，y 軸，曲線 $y=g(x)$，および直線 $y=h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2014]

5　平面上の 3 点 O, A, B は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ を満たすとする。線分 AB の中点を M とする。$t>1$ として，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となるように定める。△ABC の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　S を t と θ を用いて表せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S を t のみを用いて表せ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S が最大となる t の値を求めよ。　[2013]

6　関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の値を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ。

(3)　$\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ とおく。正の実数 t に対して，曲線 $y=f(x)$，3 直線 $x=t$，$x=0$ および $y=\alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ の値を求めよ。　[2012]

7　p，a を実数の定数とする。多項式 $P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$ を $x-3$ で割った余りが $10-6p$ であり，3 次方程式 $P(x)=0$ の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1)　実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ。

(2)　a の値を求めよ。

(3)　関数 $y=P(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ。　[2010]

8　関数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が，3 個になるような m の値の範囲を求めよ。

(3)　$m<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。　[2006]

9　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=4x^3-3x+\dfrac{1}{2}$ の増減を調べて極値を求めよ。

(2)　公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ を用いて，$k=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。

(3)　$k>\dfrac{3}{4}$ であることを示せ。

(4)　方程式 $\cos x=x$ の解を α とするとき，$\dfrac{2\pi}{9}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を示せ。ここで，$3.14<\pi<3.15$ を利用してもよい。　[2005]

10　C_1 を曲線 $y=e^x$，C_2 を曲線 $y=x\log x$ $(x>0)$ とする。ただし，log は自然対数を表す。また，$x=e$ で定義される直線を l_1，l_1 と C_2 との交点 P を通り x 軸に平行な直線を l_2，l_2 と C_1 との交点 Q を通り y 軸に平行な直線を l_3 とする。

(1)　2 点 P, Q の座標を求めよ。

(2)　$x\geqq 1$ のとき，$e^x>x\log x$ であることを示せ。

(3)　2 直線 l_1，l_3 と 2 曲線 C_1，C_2 によって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2002]

11　関数 $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ $(x\neq 0)$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$y=f(x)$ $(x\neq 0)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。

(2)　右側からの極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ は存在するか。存在するならばその値を求め，存在しないならばその理由をいえ。　[2000]

12　$0<a<1$ とする。点$(1,\ 0)$から楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$に引いた接線の接点の x 座標を b とする。

(1)　b を a で表せ。

(2)　楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$の $b \leqq x \leqq a$ の部分と直線$x=b$で囲まれた図形を，x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積 V を a で表せ。

(3)　V の値が最大となる a の値と，そのときの V の最大値を求めよ。　[1999]

13　k を定数とする。曲線$y=x^3-kx$上の点$\mathrm{P}(a,\ a^3-ka)$における接線 l が，曲線上の P と異なる点$\mathrm{Q}(b,\ b^3-kb)$を通るものとする。

(1)　b を a で表せ。

(2)　Q における曲線$y=x^3-kx$の接線が l と直交するとき，k, a の満たす関係式を求めよ。

(3)　(2)で求めた関係式を満たす a が存在するような k の値の範囲を求めよ。　[1999]

■ 積分法

1　関数$f(x)$は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$$

を満たすとする。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$の値を求めよ。また，$f'(x)=2(x-1)\cos x$が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)$を求めよ。

(3)　方程式$f(x)=0$は，$0<x<\pi$の範囲でただ１つの解をもつことを示せ。

(4)　(3)のただ１つの解をαとする。曲線$y=f(x)\ (0 \leqq x \leqq \alpha)$，$x$ 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積をS_1とし，曲線$y=f(x)\ (\alpha \leqq x \leqq \pi)$，$x$ 軸および直線$x=\pi$によって囲まれる部分の面積をS_2とする。S_1とS_2の大小を判定せよ。

[2019]

2　次の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}dx$ の値を求めよ。

(3)　次の不等式を示せ。　$\displaystyle\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$　[2018]

3　次の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c$ を定数とする。関数 $f(x)=a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x$ が定数となるための a, b, c の条件を求めよ。

(2)　関数 $g(x)=4\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x-\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ が最大値をとる x の値を θ とする。$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ の値を求めよ。

(3)　(2)の関数 $g(x)$ と θ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\theta} g(x)dx$ を求めよ。　[2011]

4　$t>1$ を満たす実数 t に対して，$S(t)=\displaystyle\int_0^1 |xe^x-tx|dx$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，方程式 $xe^x=tx$ を満たす x をすべて求めよ。

(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ を最小にする t の値を求めよ。　[2010]

5　次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式 $\dfrac{x}{n+1}\leqq\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\leqq\dfrac{x}{n}$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　次の値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$

(3)　数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[2008]

6　実数全体で定義された関数 $f(x)=\dfrac{4x+a}{x^2+1}$ は，$x=\dfrac{1}{2}$ で極値をもつ。ただし，a は定数である。次の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2005]

7　$S_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，$\dfrac{1}{\pi(n+1)^2}\leqq S_n\leqq\dfrac{1}{\pi n^2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$ の値を求めよ。　[2003]

8　関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して，$f(x)=x^2-\displaystyle\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ の値を求め，さらに $f'(x)=2x-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$(e^x f(x))'=2xe^x$ を示せ。

(3)　$f(x)$ を求めよ。　[2001]

■ 積分の応用

1　関数 $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2)　s を定数とするとき，次の x についての方程式(＊)の異なる実数解の個数を調べよ。　　(＊)　$f(x)=s$

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}dx$ の値を求めよ。

(4)　(2)の(＊)が実数解をもつ s に対して，(2)の(＊)の実数解のうち最大のものから最小のものを引いた差を $g(s)$ とする。ただし，(2)の(＊)の実数解が 1 つだけであるときには $g(s)=0$ とする。関数 $f(x)$ の最大値を α とおくとき，定積分 $\displaystyle\int_0^\alpha g(s)ds$ の値を求めよ。　[2023]

2　座標平面上の曲線 $y=x^3+x^2$ を C とする。また，a を実数とし，L_a を点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C と L_a がちょうど 2 つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ。

(2)　a が(1)の条件を満たすそれぞれの場合について，C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)　C と L_a がちょうど 3 つの共有点をもち，さらに C と L_a で囲まれた 2 つの部分の面積の差の絶対値が $\dfrac{3}{2}$ となるとき，a の値を求めよ。　[2022]

3　座標平面において，曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における法線を l とし，l と y 軸との交点を Q とする。$t\neq 0$ のとき，線分 PQ の中点を R とし，$t=0$ のときは $\mathrm{R}(0,\ 1)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l の方程式を求めよ。

(2)　t が実数全体を動くとき，点 R の描く曲線 C の方程式を求めよ。

(3)　(2)の曲線 C，y 軸，直線 $y=e^{-2}+e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ。

(4)　(3)の図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。　[2021]

4　n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

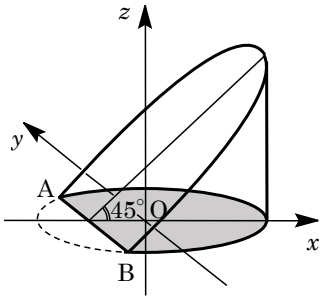
(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx\,dx$ の値を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin nx|\,dx$ の値を求めよ。

(3)　座標平面において連立不等式　$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \dfrac{1}{2}$，$y \leqq |\sin nx|$ の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(4)　座標平面において連立不等式　$0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \sqrt{x}\,|\sin nx|$ の表す図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2020]

5　座標空間内の平面 $H : z = 0$ とその上の曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と $45°$ の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H，平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1)　立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2)　立体 V を平面 $x = t\ (-1 < t < 2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3)　立体 V の体積を求めよ。　[2017]

6　次の問いに答えよ。

(1)　a を正の定数とする。関数 $f(x) = \dfrac{e^x - ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ。

(3)　c を正の定数とする。x 軸，y 軸，直線 $x = c$ および曲線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2016]

7　座標平面上の点 P(1, 1) を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする。k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}$ $(x>0)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q, R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

(1)　k, q, r の値を求めよ。

(2)　曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3)　$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ。

(4)　円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。　[2015]

8　次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$x \geqq 2$ のとき，$x^4e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ を示せ。また，これを用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-3x}$ を求めよ。

(2)　k を定数とする。$x>0$ の範囲で方程式 $xe^{-3x}=\dfrac{k}{x^2}$ がちょうど 2 つの解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3)　(2) の α，β が $\beta=2\alpha$ を満たすとき，曲線 $y=xe^{-3x}$ $(x>0)$ と曲線 $y=\dfrac{k}{x^2}$ $(x>0)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2013]

9　曲線 $y=e^x$ 上の点 A(0, 1) における接線を l とし，点 B(0, 2) を通り直線 l に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y=e^x$ の 2 つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ α，β (ただし $\alpha<\beta$) とする。直線 $x=\alpha$ と直線 l の交点を P′，直線 $x=\beta$ と直線 l の交点を Q′ とする。次の問いに答えよ。

(1)　平行四辺形 PP′Q′Q の面積 S を α，β で表せ。

(2)　直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α，β の多項式で表せ。

(3)　線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。

(4)　$\alpha+\beta>-1$ であることを示せ。　[2009]

10　A を正の定数，θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を満たす実数とし，2 つの曲線

$$y = A\cos x,\ \ y = \sin(x-\theta)\ \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

によって囲まれた図形の面積を S とする。また，この 2 つの曲線の交点の x 座標を a, $b\,(a<b)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos b \sin(a-\theta) = \cos a \sin(b-\theta)$ が成り立っているとき，$\cos\theta \sin(b-a) = 0$ を示せ。

(2)　$b - a = \pi$ を示せ。

(3)　S を A，a，θ を用いて表せ。

(4)　S^2 を A，θ を用いて表せ。

(5)　S を最大にする θ の値およびそのときの S の値を求めよ。　[2004]

11　a を $2<a<3$ を満たす定数とし，$f(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x - 1 + \dfrac{a-e^x}{a-2} - \left|e^x - 1 - \dfrac{a-e^x}{a-2}\right|\right)$ とおく。ただし, e は自然対数の底である。

(1)　$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$y = f(x)$ のグラフの $y \geqq 0$ の部分と x 軸とで囲まれる図形を直線 $x = \log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。　[2003]

12　$a>0$ とし，極方程式 $r = 2a\sin\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ で表される曲線を C とする。

(1)　曲線 C は円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。さらに，曲線 C を図示せよ。

(2)　曲線 C と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2001]

13　次の問いに答えよ。

(1)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}d\theta$ を求めよ。

(2)　媒介変数 θ を用いて,

$$x(\theta) = \int_0^\theta (1+\tan u)du,\ \ y(\theta) = \int_0^\theta (1-\tan u)du\ \ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線の長さを求めよ。　[2000]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

原点を O とする座標平面上の 2 点 A(3, 0)，B(1, 1) を考える。α，β を実数とし，点 P$(\alpha,\ \beta)$ は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないものとする。直線 OA に関して点 P と対称な点を Q とし，直線 OB に関して点 P と対称な点を R とする。次の問いに答えよ。

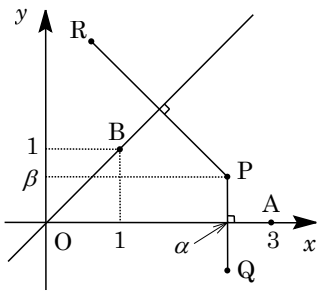
(1)　点 Q および点 R の座標を，α，β を用いて表せ。

(2)　直線 OA と直線 QR が交点 S をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 S の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(3)　直線 OB と直線 QR が交点 T をもつための条件を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。さらに，このときの交点 T の座標を，α，β のうちの必要なものを用いて表せ。

(4)　α，β は(2)と(3)の両方の条件を満たすとし，S, T は(2), (3)で定めた点であるとする。このとき，直線 OA と直線 BS が垂直となり，直線 OB と直線 AT が垂直となる α，β の値を求めよ。　[2023]

解答例



(1)　2 点 A(3, 0)，B(1, 1) に対し，直線 OA の方程式は $y=0$ ……①，直線 OB は $y=x$ ……②である。

すると，点 P$(\alpha,\ \beta)$ と直線 OA に関して対称な点 Q は Q$(\alpha,\ -\beta)$，直線 OB に関して対称な点 R は R$(\beta,\ \alpha)$ と表される。

(2)　点 P は直線 OA 上にも直線 OB 上にもないことより，$\beta\neq 0$ かつ $\alpha\neq\beta$ である。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \alpha+\beta)$ より，直線 QR は，法線ベクトルの成分として $(\alpha+\beta,\ \alpha-\beta)$ をとると，その方程式は $(\alpha+\beta)(x-\alpha)+(\alpha-\beta)(y+\beta)=0$ となり，

$$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=\alpha^2+\beta^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

①③を連立すると，$(\alpha+\beta)x=\alpha^2+\beta^2$ ……④

これより，直線 OA と直線 QR が交点 S をもつ条件は，

・$\alpha+\beta\neq 0$ のとき　④より $x=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}$，$y=0$ となる。

・$\alpha+\beta=0$ のとき　④より $\alpha^2+\beta^2=0$ となり，$\alpha=\beta=0$ から不適である。

したがって，$\alpha+\beta\neq 0$ のもとで，S$\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta},\ 0\right)$ である。

(3)　②③を連立して$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)x=\alpha^2+\beta^2$から，$2\alpha x=\alpha^2+\beta^2$ ……⑤

これより，直線 OB と直線 QR が交点 T をもつ条件は，

・$\alpha\neq 0$のとき　⑤より$x=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$，$y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$となる。

・$\alpha=0$のとき　⑤より$\alpha^2+\beta^2=0$となり，$\alpha=\beta=0$から不適である。

したがって，$\alpha\neq 0$のもとで，$\mathrm{T}\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$である。

(4)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{BS}}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1,\ -1\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3(1,\ 0)$であり，直線 OA と直線 BS が垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BS}}=0$から$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}-1=0$となり，

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha+\beta \cdots\cdots\cdots ⑥$$

(3)より，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3,\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1)$であり，直線 OB と直線 AT が垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AT}}=0$から$\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}-3+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}=0$となり，

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}=3,\ \alpha^2+\beta^2=3\alpha \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑥⑦より，$\alpha+\beta=3\alpha$から$\beta=2\alpha$となり，$\alpha^2+4\alpha^2=3\alpha$で$\alpha\neq 0$から，

$$\alpha=\frac{3}{5},\ \beta=\frac{6}{5}$$

コメント

点と直線についての基本題です。量的には多めですが，小刻みな誘導に乗れば，必要なのは正確な計算力だけです。なお，(1)は結論だけ記しましたが，プロセスも必要だったのでしょうか。

問　題

a を正の実数，t を $0<t<1$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が $\mathrm{I}(0,\ t)$ であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{IBC}$ を θ とおく。t と a を，それぞれ θ を用いて表せ。

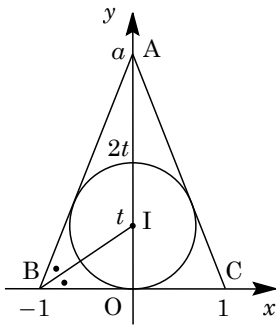
(2) a を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ。　[2022]

解答例



(1) $a>0$，$0<t<1$ のとき，3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円 S の中心を $\mathrm{I}(0,\ t)$ とする。ここで，$\angle\mathrm{IBC}=\theta$ とおくと，

$$t=\mathrm{OB}\tan\theta=\tan\theta,\ \ a=\mathrm{OB}\tan 2\theta=\tan 2\theta$$

(2) $a=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdots\cdots\cdots(*)$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とすると，$\mathrm{AG}:\mathrm{GO}=2:1$ より $\mathrm{G}\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$ となる。

ここで，G が S の周上にあるとき，$\dfrac{a}{3}>0$ に注意すると $\dfrac{a}{3}=2t$ となり，$(*)$から，

$$\frac{2t}{3(1-t^2)}=2t,\ \ 1=3(1-t^2),\ \ 3t^2=2$$

すると，$0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となる。

(4) 直線 AC の傾きは $-a$ なので，点 B から直線 AC に下ろした垂線の方程式は，

$$y=\frac{1}{a}(x+1),\ \ y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$$

y 軸との交点は $y=\dfrac{1}{a}$ なので，$\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心を H とすると，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ となる。

ここで，H が S の周上にあるとき，$\dfrac{1}{a}>0$ に注意すると $\dfrac{1}{a}=2t$ となり，$(*)$から，

$$\frac{1-t^2}{2t}=2t,\ \ 1-t^2=4t^2,\ \ 5t^2=1$$

すると，$0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

(5)　線分 AC の中点は$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$なので，線分 AC の垂直二等分線の方程式は，

$$y-\frac{a}{2}=\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad y=\frac{1}{a}x+\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}$$

y 軸との交点は$y=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}$なので，△ABC の外心を P とすると，$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}\right)$となる。ここで，P が S の周上にあるとき$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$または$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$なので，

(i)　$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$のとき　$a^2-1=0$となり，$a>0$から$a=1$

(＊)より$\dfrac{2t}{1-t^2}=1$すなわち$t^2+2t-1=0$となり，$0<t<1$から$t=-1+\sqrt{2}$

(ii)　$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$のとき　(＊)より$\dfrac{t}{1-t^2}-\dfrac{1-t^2}{4t}=2t$となり，

$$4t^2-(1-t^2)^2=8t^2(1-t^2),\quad 7t^4-2t^2-1=0$$

すると，$t^2=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}$となり，$0<t<1$から$t=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$である。

(i)(ii)より，t のとり得る値は，$t=-1+\sqrt{2},\ \sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$である。

コメント

三角形の五心を題材にした点と直線の問題です。(4)と(5)は図形的な方法も考えられますが，解答例のような座標計算の方が確実でしょう。なお，(5)は配慮の感じられる問題文です。

問　題

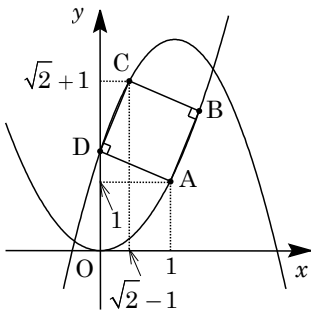
座標平面において，2 つの放物線 $y=x^2$，$y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上にそれぞれ点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ は垂直であるとする。このとき，B の座標を求めよ。

(2) 放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は垂直であるとする。このとき，D の座標を求めよ。

(3) B, D はそれぞれ(1), (2)で定めたものとする。このとき，四角形 ABCD が正方形であることを示せ。 [2021]

解答例



(1) 放物線 $y=x^2$ ……① 上に点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，放物線 $y=-\sqrt{2}x^2+3x+\sqrt{2}$ ……②上に点 $\mathrm{C}(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}+1)$ がある。このとき放物線①上に，点 A と異なる点 $\mathrm{B}(t,\ t^2)$ $(t\neq 1)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ が垂直になるようにとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t-1,\ t^2-1)=(t-1)(1,\ t+1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(t-\sqrt{2}+1,\ t^2-\sqrt{2}-1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ から，

$$(t-\sqrt{2}+1)+(t+1)(t^2-\sqrt{2}-1)=0$$

まとめると，$t^3+t^2-\sqrt{2}t-2\sqrt{2}=0$ となり，

$$(t-\sqrt{2})\{t^2+(\sqrt{2}+1)t+2\}=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

$t^2+(\sqrt{2}+1)t+2=0$ は，$D=(\sqrt{2}+1)^2-8=2\sqrt{2}-5<0$ より実数解をもたないので，③の実数解は $t=\sqrt{2}$ となり，これより $\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 2)$ である。

(2) 放物線②上に，点 C と異なる点 $\mathrm{D}(s,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2})$ $(s\neq\sqrt{2}-1)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が垂直になるようにとると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(s-1,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(s-\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-\sqrt{2}-1)$$
$$=(s-\sqrt{2}+1)(1,\ -\sqrt{2}s+\sqrt{2}+1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ から，

$$(s-1)+(-\sqrt{2}s^2+3s+\sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}s+\sqrt{2}+1)=0$$

まとめると，$s^3-(2\sqrt{2}+1)s^2+(2\sqrt{2}+1)s=0$ となり，

$$s\{s^2-(2\sqrt{2}+1)s+2\sqrt{2}+1\}=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

$s^2-(2\sqrt{2}+1)s+2\sqrt{2}+1=0$ は，$D=(2\sqrt{2}+1)^2-4(2\sqrt{2}+1)=5-4\sqrt{2}<0$ より実数解をもたないので，④の実数解は $s=0$ となり，これより $\mathrm{D}(0,\ \sqrt{2})$ である。

(3)　(1)(2)より，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2}-1,\ 1)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,\ \sqrt{2}-1)$ となり，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)=0$$

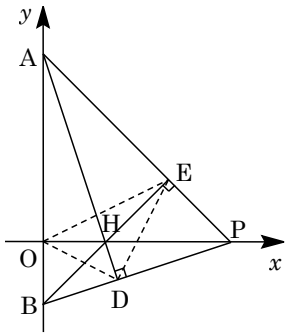
これより，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ は垂直になり，四角形 ABCD は長方形である。

さらに，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+1}$ から，四角形 ABCD は正方形である。

コメント

放物線を題材にした問題です。平易な内容であるものの，計算量はかなりのもので，時間を費やしてしまいます。

問　題



原点を O とする座標平面上において，点 A(0, 3)，B(0, −1) および x 軸上の正の部分を動く点 P(t, 0) があり，∠APB は鈍角でないとする。△ABP の垂心を H，頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D，頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。この交点のことを，三角形の垂心という。

(1)　∠APB が直角となる t の値を求めよ。

(2)　点 H の座標を t を用いて表せ。

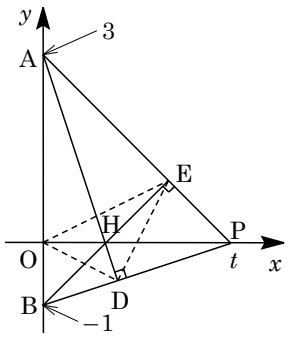
以下では，t が(1)で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3)　点 H が△ODE の内心であることを証明せよ。ただし，1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを，証明なしに利用してもよい。

(4)　△ODE の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ。

(5)　(4)で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ。ただし，最大値を与える t の値を求める必要はない。　[2019]

解答例



(1)　$t>0$ のとき，A(0, 3)，B(0, −1)，P(t, 0) に対し，直線 AP の傾きは $\dfrac{-3}{t}$，直線 BP の傾きは $\dfrac{1}{t}$ なので，∠APB が直角の条件は，

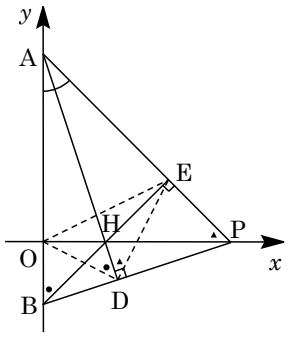
$$\frac{-3}{t}\cdot\frac{1}{t}=-1,\ t^2=3$$

よって，$t>0$ から $t=\sqrt{3}$ である。

(2)　AD ⊥ BP より，直線 AD は傾き $-t$ から，その方程式は，

$$y=-tx+3\cdots\cdots\cdots①$$

直線 AD と OP の交点が△ABP の垂心 H なので，$0=-tx+3$ より $x=\dfrac{3}{t}$ となり，H$\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ である。



(3)　$t>\sqrt{3}$ のとき，∠APB は鋭角となる。

さて，∠BOH＋∠BDH＝180° より，四角形 OBDH は円に内接するので，

$$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{ABE}\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\angle\mathrm{PEH}+\angle\mathrm{PDH}=180^\circ$ より，四角形 PEHD は円に内接するので，

$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{APO}$ ……③

さらに，△ABE と△AOP はともに直角三角形なので，

$\angle\mathrm{ABE}=90^\circ-\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{APO}$ ……④

②③④より，$\angle\mathrm{ADO}=\angle\mathrm{ADE}$ となり，直線 AD は∠ODE の二等分線である。

同様にすると，直線 BE は∠OED の二等分線である。

以上より，直線 AD と BE の交点 H は，△ODE の内心になる。

(4)　まず，直線 BP の方程式は，$y=\dfrac{1}{t}x-1$ ……⑤

①⑤を連立して，$-tx+3=\dfrac{1}{t}x-1$ より，$\dfrac{t^2+1}{t}x=4$ となり，

$$x=\frac{4t}{t^2+1},\ y=-\frac{4t^2}{t^2+1}+3=-\frac{t^2-3}{t^2+1}$$

これより，$\mathrm{D}\left(\dfrac{4t}{t^2+1},\ -\dfrac{t^2-3}{t^2+1}\right)$ となり，直線 OD の方程式は，

$$y=-\frac{t^2-3}{4t}x,\ (t^2-3)x+4ty=0$$

すると，△ODE の内接円の半径 $f(t)$ は，$\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{t},\ 0\right)$ と直線 OD の距離になり，$t>\sqrt{3}$ から，

$$f(t)=\frac{\left|(t^2-3)\cdot\dfrac{3}{t}\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}=\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}=\frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{t^4+10t^2+9}}\ \cdots\cdots⑥$$

(5)　まず，$s=t^2-3$ とおくと，$t>\sqrt{3}$ より $s>0$ となる。

⑥より，$f(t)=3\sqrt{\dfrac{(t^2-3)^2}{t^2\{(t^2-3)^2+16t^2\}}}$ と変形し，$f(t)=3\sqrt{g(s)}$ とおくと，

$$g(s)=\frac{s^2}{(s+3)\{s^2+16(s+3)\}}=\frac{s^2}{(s+3)(s+4)(s+12)}$$

すると，$g(s)$ は $s>0$ で $g(s)>0$ である連続な関数で，しかも $\displaystyle\lim_{s\to+0}g(s)=0$ かつ $\displaystyle\lim_{s\to\infty}g(s)=0$ なので，$s>0$ において最大値をもつ。

したがって，$t>\sqrt{3}$ において $f(t)$ は最大値をもつ。

コメント

三角形の垂心と内心を題材にした図形と式の問題です。(3)はいろいろな解法が考えられますが，問題文の誘導に従ったもので記述しています。なお，理系単独の(5)については，問題文の微妙な表現のため，初めに作った解答例で記述しましたが，実は，対数微分をして延々計算をし，増減表を書いたりもしたのですが……。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　次の条件(A)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(A)　2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(2)　次の条件(B)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(B)　2 次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$を満たす実数 $x,\ y$ を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(3)　座標平面上の点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲の面積を求めよ。　[2018]

解答例

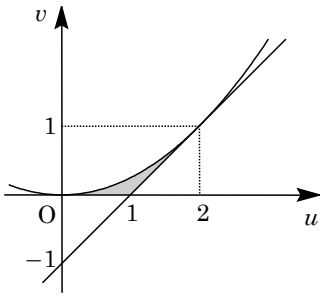
(1)　まず，$f(t)=t^2-ut+v=\left(x-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$とおく。

条件(A)より，$f(t)=0$の 2 解$t=x,\ y$について，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$なので，

$$-\frac{u^2}{4}+v\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots①,\quad 0\leqq \frac{u}{2}\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$f(0)=v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$f(1)=1-u+v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots④$$



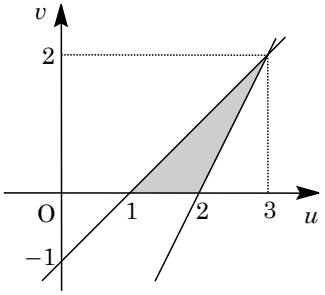
①③から$0\leqq v\leqq \dfrac{u^2}{4}$，②から$0\leqq u\leqq 2$，④から$v\geqq u-1$となるので，点$(u,\ v)$の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2)　条件(B)より，$f(t)=0$の 2 解$t=x,\ y$について，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$なので，

$$f(0)=v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

$$f(1)=1-u+v\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

$$f(2)=4-2u+v\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$



⑤⑥から$0\leqq v\leqq u-1$，⑦から$v\geqq 2u-4$となるので，点$(u,\ v)$の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

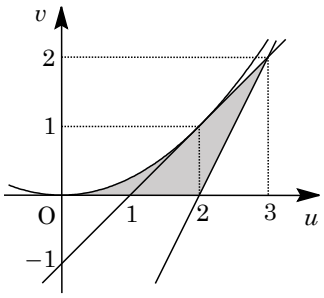
(3)　点$(x,\ y)$が 4 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，x, yの条件は$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 2$と表せ，これは(1), (2)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

ここで，$f(t)=0$の 2 解$t=x,\ y$について，解と係数の関係から，

$x+y=u$，$xy=v$

これより，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲は点$(u,\ v)$の動く範囲に対応し，(1), (2)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして，その面積Sは，

$$S=\int_0^2 \frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{12}\left[u^3\right]_0^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$



コメント

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(1)と(2)の結果が(3)にストレートにつながっています。

問　題

座標平面上で，曲線 $C: y=x^3-3x$ と，$b>a^3-3a$ を満たすように動く点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を考える。また，点 P に対し，2 つの不等式 $|x-a|\leqq 1$，$|y-b|\leqq 1$ によって表される座標平面上の領域を B とする。領域 B と曲線 C に対して，B と C が共有点 Q をもち，さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき，B と C は点 Q で接するということにする。次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形をかき，さらに点 P の座標が $(-2,\ 3)$ のときの領域 B を図示せよ。

(2)　B と C が $x<-1$ の範囲にある点で接するように，点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(3)　B と C がある点で接するように点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。

(4)　(3)の点 P の軌跡は，ある関数 $y=f(x)$ のグラフで表すことができる。この $f(x)$ は $x=0$ で微分可能であることを示せ。　[2018]

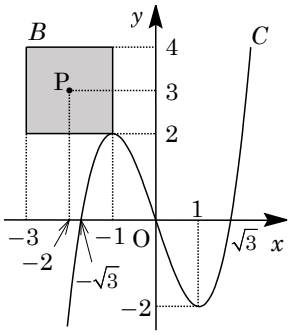
解答例

(1)　曲線 $C: y=x^3-3x$ に対して，

$$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

すると，C の増減は右表および C の概形は右図のようになる。



さらに，$\mathrm{P}(-2,\ 3)$ のとき，領域 B は，

$$|x+2|\leqq 1,\ |y-3|\leqq 1$$

図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。

(2)　$b>a^3-3a$ を満たす $\mathrm{P}(a,\ b)$ に対して，

$$B: |x-a|\leqq 1,\ |y-b|\leqq 1$$

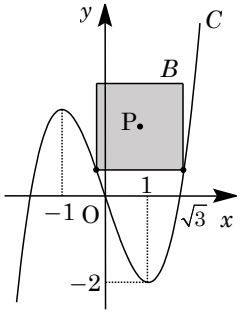
さて，B と C の接点を $\mathrm{Q}(t,\ t^3-3t)$ とし，$t<-1$ のとき，

$$a=t-1,\ b=t^3-3t+1$$

すると，$t=a+1<-1\ (a<-2)$ となり，

$$b=(a+1)^3-3(a+1)+1=a^3+3a^2-1$$

よって，点 P の軌跡は曲線 $y=x^3+3x^2-1\ (x<-2)$ である。



(3)　まず，B と C が右図の位置にあるとき，$\mathrm{P}(a,\ b)$ について，2 点 $(a-1,\ b-1)$，$(a+1,\ b-1)$ はともに C 上にあり，

$$b-1=(a-1)^3-3(a-1)\cdots\cdots\cdots①$$

$$b-1=(a+1)^3-3(a+1)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より $6a^2+2-6=0$ となり，$a>0$ から $a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ であり，このとき接点 $\mathrm{Q}(t,\ t^3-3t)$ は，$t=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\pm1$ となる。

以下，$\mathrm{P}(a,\ b)$，$\mathrm{Q}(t,\ t^3-3t)$ の位置関係をもとに場合分けをする。

(i)　$t<-1\ (a<-2)$ のとき

(2)より，点 P の軌跡は，曲線 $y=x^3+3x^2-1\ (x<-2)$ である。

(ii)　$t=-1\ (-2\leqq a\leqq 0)$ のとき

このとき $b=2+1=3$ となり，点 P の軌跡は，線分 $y=3\ (-2\leqq x\leqq 0)$ である。

(iii)　$-1<t\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}-1\left(0<a\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ のとき

このとき $a=t+1$，$b=t^3-3t+1$ となり，

$$b=(a-1)^3-3(a-1)+1=a^3-3a^2+3$$

よって，点 P の軌跡は，曲線 $y=x^3-3x^2+3\left(0<x\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ である。

(iv)　$t>\dfrac{\sqrt{6}}{3}+1\left(a>\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ のとき

このとき $a=t-1$，$b=t^3-3t+1$ となり，

$$b=(a+1)^3-3(a+1)+1=a^3+3a^2-1$$

よって，点 P の軌跡は，曲線 $y=x^3+3x^2-1\left(x>\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ である。

(4)　点 P の軌跡の方程式を $y=f(x)$ とすると，(3)から，

$$f(x)=x^3+3x^2-1\ (x<-2),\quad f(x)=3\ (-2\leqq x\leqq 0)$$

$$f(x)=x^3-3x^2+3\left(0<x\leqq\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\quad f(x)=x^3+3x^2-1\left(x>\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

ここで，$f(x)$ の $x=0$ における微分可能性について調べると，

$$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{3-3}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x^3-3x^2+3-3}{x}=\lim_{x\to+0}(x^2-3x)=0$$

これより，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

コメント

微分の応用と軌跡の融合問題です。3 次曲線のいわば「上に乗っている」正方形の中心の軌跡を求めるものですが，図をもとにした直感的な解答例になっています。誘導は細かいのですが作業量は多く，時間はかなりかかります。