２０２４ 入試対策

過去問ライブラリー

千葉大学

理系数学 25か年

１９９９ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策

千 葉 大 学

理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，1999 年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1, 2,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　次

分野別問題一覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で 3 つの条件 $\mathrm{PQ}=2$，$p<q$，$p+q=\sqrt{t}$ を満たすものを考える。△OPQ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S=0$ とする。

(1)　p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

(2)　S を t を用いて表せ。

(3)　$S=1$ となるような t の個数を求めよ。　[2017]

2　座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(\text{ただし } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。　[2014]

3　$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

4　放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1)　直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3)　連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$ の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。　[2012]

5　a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O(0, 0)，A(1, 0) をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

(i)　$p>0$，$q>0$　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　△OPQ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

[2010]

6　座標平面上に点 A(3, 0)，B(0, 2) をとる。線分 AB 上に点 P をとり，P から x 軸に下ろした垂線を PH，A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし，また P は A と異なるものとする。O を原点とし△OPM を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき，通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。　[2009]

7　a, t を実数とするとき，座標平面において，$x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ で定義される図形 C を考える。

(1)　すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ。ただし，点は円とみなさないものとする。

(2)　$a=4$ とする。t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

(3)　$a=6$ とする。t が $t>0$ であって，かつ C が円であるような範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。　[2006]

8　(1)　次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1)\geqq\log_{10}(-2x^2+2x+1)$$

(2)　x, y が(1)の不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。　[2005]

9　C は，2 次関数 $y=x^2$ のグラフを平行移動した放物線で，頂点が円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上にある。原点から C に引いた接線で傾きが正のものを l とおく。このとき，C と l の接点の x 座標が最大および最小になるときの C の頂点の座標をそれぞれ求めよ。　[2001]

■ 図形と計量

1　四面体 ABCD において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$，$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ が成り立っている。三角形 ABC の重心を G とする。

(1)　$\angle\mathrm{BDC}$ を求めよ。

(2)　$\dfrac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}$ の値を求めよ。　[2020]

2　三角形 ABC は $\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\mathrm{AD}=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle\mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。　[2019]

3　1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$\mathrm{CE}=t$ とする。

(1)　AD の長さを求めよ。

(2)　$\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{ADE}$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。　[2013]

4　横 $2a$，縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また，回転角 θ は 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。　[2012]

■ ベクトル

1　点 O を原点とする座標平面において，点 A と点 B が $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=5$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$ となるような実数 k は存在しないことを示せ。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点を H とする。$\overrightarrow{HB}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(3)　実数 t に対し，直線 OA 上の点 P を $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}$ となるようにとる。同様に直線 OB 上の点 Q を $\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}$ となるようにとる。点 P を通り直線 OA と直交する直線を l_1 とし，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を l_2 とする。l_1 と l_2 の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，t を用いて表せ。

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

[2023]

2　座標空間において，原点 O と点 A$(1,\ 0,\ -1)$ と点 B$(0,\ 5,\ 0)$ がある。実数 t を用いて $t\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ と表される点全体を l とする。また，xy 平面上の $y=x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする。

(1)　曲線 C 上の点 P$(a,\ a^2,\ 0)$ を固定する。l 上の点 Q を，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直であるようにとる。このとき，点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2)　曲線 C 上の点 R と l 上の点 S のうち，$|\overrightarrow{RS}|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ。また，そのときの $|\overrightarrow{RS}|$ の値を求めよ。　[2022]

3　正方形 ABCD の辺を除く内部に，PA ⊥ PB を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{PC}$ を $x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}$ と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}$ とするとき，x, y を α を用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた $x,\ y$ の和 $x+y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。　[2018]

4　n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1)　$\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2)　t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3)　不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。　[2017]

5　座標平面上にすべての内角が180°未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおく。k は $0\leqq k\leqq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1)　$E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2)　$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

6　三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　[2011]

7　△ABC は，1 辺の長さが 1 の正三角形で，t は正の実数とする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。直線 AB，AC 上にそれぞれ点 D，E があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}$ を満たしている。正三角形△ADE の重心を G，線分 BE の中点を M とする。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ を計算せよ。

(2)　t が正の実数全体を動くとき，△CGM の面積を最小にする t の値と，そのときの面積を求めよ。　[2010]

8　平面上の△ABC において，辺 AB を $4:3$ に内分する点を D，辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし，線分 AE と CD の交点を O とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表せ。

(2)　点 O が△ABC の外接円の中心になるとき，3 辺 AB，BC，CA の長さの 2 乗の比を求めよ。　[2008]

9　△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ とする。辺 AB 上に点 $\mathrm{P_1}$ をとる。ただし $\mathrm{P_1}$ は A，B とは異なるとする。$\mathrm{P_1}$ から辺 OB に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を下ろす。次に，$\mathrm{Q_1}$ から辺 OA に垂線 $\mathrm{Q_1R_1}$ を下ろす。さらに，$\mathrm{R_1}$ から辺 AB に垂線 $\mathrm{R_1P_2}$ を下ろす。以下，同様の操作を続けて，点 P_n，Q_n，R_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を定める。$\overrightarrow{\mathrm{AP}_n}=t_n(\vec{b}-\vec{a})$ により t_n $(0<t_n<1)$ を定める。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BQ_1}}$ を t_1 と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　t_2 を t_1 を用いて表せ。

(3)　t_n を t_1 と n を用いて表せ。

(4)　$\mathrm{P_1}=\mathrm{P_2}$ となるような t_1 の値を求めよ。

(5)　$\mathrm{P_1}=\mathrm{P_2}$ のとき，△$\mathrm{P_1Q_1R_1}$ の面積を求めよ。　[2006]

10　xyz 空間内に点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(-5,\ 4,\ 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。　[2004]

11　R を平面上の凸六角形とし，その頂点を順に A，B，C，D，E，F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおく。R が $\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\vec{b}$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2)　三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3)　R が(2)の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき，R の面積を求めよ。　[2003]

12 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\vec{0}$ を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

(1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。 [2002]

13 四面体 OABC において $OA=3$，$OB=4$，$OC=6$，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=60^\circ$ とする。OA を $t:1-t$ の比に内分する点を D，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\angle BDC=\theta$ としたとき $\cos\theta$ を t の式で表せ。

(3) 三角形 BDC の面積の最小値を求めよ。 [1999]

■ 整数と数列

1 0 以上 9999 以下の整数を 4 桁で表示し，以下の操作を行うこととする。ただし，4 桁で表示するとは，整数が 100 以上 999 以下の場合は千の位の数字を 0，10 以上 99 以下の場合は千の位と百の位の数字を 0，1 以上 9 以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を 0，そして 0 はどの位の数字も 0 とすることである。

操作：千の位の数字と十の位の数字を入れ換える。さらに，百の位の数字と一の位の数字を入れ換える。

また，整数 L に対し，操作によって得られた整数を $\overline{L}$ と表す。

(1) M を 0 以上 9999 以下の整数とし，$M=100x+y$ のように整数 x，y $(0\leqq x\leqq 99,\ 0\leqq y\leqq 99)$ を用いて表す。操作によって得られた $\overline{M}$ が M の $\dfrac{2}{3}$ 倍に 3 を足した数に等しいならば，$-197x+298y=9$ が成り立つことを証明せよ。

(2) N が 0 以上 9999 以下の整数ならば，操作によって得られた整数 $\overline{N}$ は N の $\dfrac{2}{3}$ 倍に 1 を足した数と等しくならないことを証明せよ。 [2022]

2　x, y についての方程式 $x^2-6xy+y^2=9$ ……(＊)に関する次の問いに答えよ。

(1)　$x,\ y$ がともに正の整数であるような(＊)の解のうち, y が最小であるものを求めよ。

(2)　数列 a_1，a_2，a_3，…が漸化式

$$a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき，$(x,\ y)=(a_{n+1},\ a_n)$ が(＊)を満たすならば，$(x,\ y)=(a_{n+2},\ a_{n+1})$ も(＊)を満たすことを示せ。

(3)　(＊)の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ。　[2022]

3　m を正の整数とする。座標平面上の点 $(x,\ y)$ で，xn^3+yn^2 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がすべて整数であるようなものは, 連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq m$ の表す領域に何個あるか答えよ。　[2021]

4　$a_1=3$，$a_2=2$ とし，$n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1)　$n \geqq 2$ のとき $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ が成り立つような自然数 n を求めよ。　[2019]

5　初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし, また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし, 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1=7$ であり, また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1)　数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{d_l\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{d_l\}$ の初項から第 l 項までの和 $S_l=\displaystyle\sum_{i=1}^{l}d_i$ を求めよ。　[2018]

6　b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。これを証明せよ。　[2015]

7　座標平面上に，円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と点 $\mathrm{Q}(1,\ 2)$ がある。点 P_1 の座標を $(3,\ 0)$ とし，x 軸上の点 P_2，P_3，…を以下の条件によって決め，P_n の座標を $(p_n,\ 0)$ とする。

点 P_n から円 C に接線を引き，その y 座標が正である接点を T_n とする。このとき，3 点 Q，T_n，P_{n+1} は同一直線上にある。$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 T_1 の座標を求めよ。

(2)　点 P_2 の座標を求めよ。

(3)　点 T_n の座標を p_n の式で表せ。

(4)　点 P_n の座標を n の式で表せ。　[2014]

8　整数 p，q $(p\geqq q\geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0!=1$ とする。

(1)　n，k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。　[2013]

9　1 より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n \geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2012]

10　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y) \mid x^2 \leqq y \leqq ax+b\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　a, b がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，a, b の値によらず一定であることを示せ。　[2010]

11　以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば，x は整数であることを示せ。

(2)　a, b を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば，a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数，s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば，s は整数であることを示せ。　[2008]

12　n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。　[2007]

13　n を自然数とする。n 次多項式 $P_n(x)$ は，$n+1$ 個の整数 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，$P_n(k)=2^k-1$ を満たす。

(1)　$P_2(x)-P_1(x)$ および $P_3(x)-P_2(x)$ を因数分解せよ。

(2)　$P_n(x)$ を求めよ。　[2004]

14　数列 $\{a_n\}$ は次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$a_1=\dfrac{1}{2}$　　(ii)　$n\geqq 2$ について，$a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$

ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ である。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ に対して，S_n を S_{n-1} で表せ。

(3)　S_n を求めよ。

(4)　$n\geqq 2$ に対して，a_n を求めよ。　[2000]

15　$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_n=3(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。ただし，S_n は $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和である。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　$\sqrt{S_n}$ を求めよ。

(3)　a_n を求めよ。　[1999]

■ 確率

1　1 個のさいころを投げて出た目によって数直線上の点 P を動かすことを繰り返すゲームを考える。最初の P の位置を $a_0=0$ とし，さいころを n 回投げたあとの P の位置 a_n を次のルールで定める。

・$a_{n-1}=7$ のとき，$a_n=7$

・$a_{n-1}\neq 7$ のとき，n 回目に出た目 m に応じて

$$a_n=\begin{cases} a_{n-1}+m & (a_{n-1}+m=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ のとき}) \\ 1 & (a_{n-1}+m=2,\ 12 \text{ のとき}) \\ 14-(a_{n-1}+m) & (a_{n-1}+m=8,\ 9,\ 10,\ 11 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1)　$a_2=1$ となる確率を求めよ。

(2)　$n\geqq 1$ について，$a_n=7$ となる確率を求めよ。

(3)　$n\geqq 3$ について，$a_n=1$ となる確率を求めよ。　[2023]

2　n を自然数とする。n 個のサイコロを同時に投げ，出た目の積を M とおく。

(1)　M が 2 でも 3 でも割り切れない確率を求めよ。

(2)　M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない確率を求めよ。

(3)　M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない確率を求めよ。　[2022]

3　袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。
袋から 1 個の球を取り出す。それが白球ならば 1 点獲得する。黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

(1)　$n=2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ。

(2)　$n=4$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ。

(3)　$n=10$ の場合，総得点が 8 点以上となる確率を求めよ。　[2021]

4　袋の中に 1 から 5 までの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている。その中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す。n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とする。n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n を求めよ。

(3)　$n \geqq 4$ とする。S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3=5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ。　[2020]

5　コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A, B, C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚，箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚，箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚，箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1)　箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2)　A, B, C いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。

(3)　試行の後に箱 A を開けるとちょうど 2 枚のコインが入っていた。このとき箱 B にコインがちょうど 2 枚入っている確率を求めよ。　[2019]

6　箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す。この操作を繰り返し，記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率 $P(k)$ を求めよ。 [2018]

7　1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・1 回目は，出た目が得点になる。

・2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。

・3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1)　総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。

(3)　p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ。 [2017]

8　数直線上の点 Q は，はじめは原点 $x=0$ にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Q が $x=a$ にあるとき，

・出た目が 1 ならば $x=a$ にとどまる。

・出た目が 2, 3 ならば $x=a+1$ へ動く。

・出た目が 4, 5, 6 ならば $x=0$ に戻る（$a=0$ ならば動かない）。

(1)　整数 $a \geqq 0$ に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が $x=a$ にある確率を求めよ。

(2)　さいころを n 回投げたとき，Q が $x=0$ にある確率を求めよ。

(3)　さいころを n 回投げたとき，Q が $x=1$ にある確率を求めよ。 [2016]

9　コインを n 回続けて投げ，1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

・コイン投げの第 1 回目には，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と異なる面が出たら，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と同じ面が出たら，2 点を得点とする。

たとえば，コインを 3 回投げて(裏，表，裏)の順に出たときの得点は，$1+1+1=3$ より 3 点となる。また(裏，裏，表)の順に出たときの得点は，$1+2+1=4$ より 4 点となる。コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とし，このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 2$ が与えられたとき，$P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。

(2)　$n \leqq m \leqq 2n-1$ について，$P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。　[2015]

10　袋の中に，赤玉が 3 個，白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し，色を確認してから，再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回（ただし $0 \leqq A \leqq N$）取り出す確率を $p(N,\ A)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　確率 $p(N,\ A)$ を N と A を用いて表せ。

(2)　N が 10 の倍数，すなわち $N=10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n,\ 0)$，$p(10n,\ 1)$，…，$p(10n,\ 10n)$ のうち，一番大きな値は $p(10n,\ 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i)　0 以上の整数 a，自然数 b に対して，$\frac{b!}{a!} \leqq b^{b-a}$ を示す。ただし $0!=1$ とする。

(ii)　0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して，$\frac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)} \leqq 1$ を示す。　[2014]

11　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。

(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

12　さいころを 7 回投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2)　積 $X_1X_2 \cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

(3)　積 $X_1X_2 \cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4)　積 $X_1X_2 \cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。　[2012]

13　$k+1$ 個 $(k \geqq 1)$ の部屋 A_0，A_1，A_2，…，A_k がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。　[2011]

14　数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

(規則)　サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1) \neq 0$，$X(2) \neq 0$，…，$X(5) \neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1) \neq 0$，$X(2) \neq 0$，…，$X(9) \neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。　[2010]

15　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1)　X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 12 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が平方数になる確率を求めよ。ただし，X は平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X=n^2$ と表されることである。　[2009]

16　1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードがある。この n 枚のカードの中から 1 枚を取り出し，その番号を記録してからもとに戻す。この操作を 3 回繰り返す。記録した 3 個の番号が 3 つとも異なる場合には大きい方から 2 番目の値を X とする。2 つが一致し，1 つがこれと異なる場合には，2 つの同じ値を X とし，3 つとも同じならその値を X とする。

(1)　確率 $P(X \leqq k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(X=k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(3)　$P(X=k)$ が最大となる k の値はいくつか。　[2008]

■ 論証

1　n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

2　関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して定義され，すべての実数 x で微分可能であるとする。このとき，以下の命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ。

(1)　$x_1 < x_2$ を満たすすべての実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとする。このとき，すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ である。

(2)　$f(0) = 0$ かつすべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば，$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ である。

(3)　$f(0) = 0$ かつすべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば，$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$ である。　[2003]

3　次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2)　n が正の整数のとき，$\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。　[2002]

■ 複素数

1　実数 a, b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z = a + bi$ の形で表されるとき，a を z の実部，b を z の虚部とよび，それぞれ $a = \mathrm{Re}(z)$，$b = \mathrm{Im}(z)$ と表す。

(1)　$z^3 = i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

(2)　$z^{100} = i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \leqq \frac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z) \geqq 0$ を満たすものの個数を求めよ。

(3)　n を正の整数とする。$z^n = i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z) \geqq \frac{1}{2}$ を満たすものの個数を N とする。$N > \frac{n}{3}$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ。

[2023]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　$w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とする。ただし，i は虚数単位である。z を 0 でない複素数とするとき，次の等式を証明せよ。

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)=z^5-\frac{1}{z^5}$$

(2)　ある定数 C に対して，等式

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=C\sin 5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つことを示せ。また，C の値を求めよ。

(3)　$\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}$ の値を求めよ。　[2021]

3　複素数平面上で複素数 0，$\sqrt{3}$，$\sqrt{3}+i$ を表す点をそれぞれ A_1，B_0，B_1 とする。正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似になるものとする。点 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が表す複素数を z_n とする。

(1)　複素数 z_3 を求めよ。

(2)　複素数 z_6 を求めよ。

(3)　正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。　[2020]

4　複素数平面上の点 $z\left(z\neq-\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w=\dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1)　点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2)　点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。　[2017]

5　$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3)　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。　[2016]

6　a, b, c は実数とし，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$ とおく。さらに 4 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 α，β と 2 つの虚数解をもち，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$ を満たすと仮定する。

(1)　b, c を a を用いて表せ。

(2)　a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　b のとり得る値の範囲を求めよ。　[2011]

7　α は絶対値 1 の複素数とし，複素数 z に対して，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1)　複素数平面上で，z が原点と点 α を通る直線上（ただし，点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき，w の表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2)　複素数平面上で，z が不等式 $|z|>1$ を満たすとき，複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。　[2005]

8　$0<t<1$ とする。2 次方程式 $x^2-2tx+1=0$ の解の 1 つを α とする。複素数平面上の 4 点を $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(-1)$，$\mathrm{B}(1)$，$\mathrm{P}(\alpha)$ とし，AB を直径とする円を C とする。点 A を通り OP に平行な直線が円 C と交わる A 以外の点を Q とする。

(1)　$|\alpha|$ を求めよ。

(2)　四角形 ABPQ の面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ。　[2004]

9　a を実数とし，z を複素数とする。複素数平面上で，a，z，z^2，z^3 が表す 4 点が，あるひし形の 4 頂点になるとする。ただし，a と z^2 が表す頂点は対角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。　[2003]

10　次の問いに答えよ。

(1)　複素数平面上で方程式 $|z-3i|=2|z|$ が表す図形を求め，図示せよ。

(2)　複素数 z が(1)で求めた図形から $z=i$ を除いた部分を動くとき，複素数 $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ で表される点の軌跡を求め，図示せよ。　[2002]

11　i を虚数単位とし，複素数 z に共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。

(1)　a を実数の定数とする。条件 $1-\overline{z}=(a+i)(z-\overline{z})$ を満たす複素数平面上の点 z の全体が直線であるとき, a の値を求めよ。

(2)　実軸上にない複素数 α に対して，3 点 0，1，α を通る複素数平面上の円の中心を β とする。このとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3)　α，β を(2)の複素数とする。点 α が(1)の直線上を動くとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は一定であることを証明せよ。　[2001]

12　s，t は $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とし，$\alpha=si$，$\beta=t$ とおく。ここで，i は虚数単位である。複素数 γ は実部と虚部が正であるものとし，複素数平面上で，α，β，γ は正三角形をなすとする。

(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を求めよ。

(2)　s, t が上記の範囲を動くとき，γ が描く図形を図示せよ。　[2000]

13　複素数平面上に三角形 ABC があり，その頂点 A，B，C を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3 とする。複素数 w に対して，$z_1=wz_3$，$z_2=wz_1$，$z_3=wz_2$ が成り立つとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$1+w+w^2$ の値を求めよ。

(2)　三角形 ABC はどんな形の三角形か。

(3)　$z=z_1+2z_2+3z_3$ の表す点を D とすると，三角形 OBD はどんな形の三角形か。ただし, O は原点である。　[1999]

■ 曲線

1　双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0>0$)を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$，Q_n を定義していく。

(1)　Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2)　a_n を a_0 を用いて表せ。

(3)　$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。　[2015]

■ 極限

1　2 つの実数 $a,\ b$ は $0<b<a$ を満たすとする。関数 $f(x)=\dfrac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})$ の最大値を $M(a,\ b)$，最大値をとるときの x の値を $X(a,\ b)$ と表す。ここで，e は自然対数の底である。

(1)　$X(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0}X(a,\ b)$ を求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0}M(a,\ b)$ を求めよ。　[2023]

2　r は $0<r<1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ があり，その頂点を反時計まわりに A_n，B_n，C_n，D_n とする。さらに R_n は次の条件(i), (ii)を満たすとする。

(i)　正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0(0,\ 0)$，$\mathrm{B}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{C}_0(1,\ 1)$，$\mathrm{D}_0(0,\ 1)$ である。

(ii)　$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_2，A_3，A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2)　A_{4n} の座標を $(x_n,\ y_n)$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。$x_{n+1}-x_n$ および $y_{n+1}-y_n$ を $r,\ n$ の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を r を用いて表せ。　[2011]

■ 微分法

1　座標平面上に曲線 $C: y=\dfrac{1}{x}$ および 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{D}(1,\ 0)$ がある。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ に対して，直線 AP と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。ただし，P が A と等しいとき，直線 AP とは A における C の接線のこととする。また，直線 BQ に点 D から下ろした垂線と直線 BQ の交点を R とする。

(1)　点 P が曲線 C 上を動くとき，点 R の軌跡を求めよ。

(2)　直線 PR が原点を通るような実数 t の個数を求めよ。　[2021]

2　a は 0 でない定数とする。2 つの放物線 $y=x^2$ と $x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ。　[2020]

3　座標平面上の円 C は，点 $(0,\ 0)$ を通り，中心が直線 $x+y=0$ 上にあり，さらに双曲線 $xy=1$ と接する。このとき，円 C の方程式を求めよ。ただし，円と双曲線がある点で接するとは，その点における円の接線と双曲線の接線が一致することをいう。

[2019]

4　a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3)　s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。　[2018]

5　曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t $(t \geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　C の方程式を求めよ。

(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。　[2017]

6　以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，不等式 $\log x<x$ を示せ。

(2)　$1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3)　$x\geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。　[2016]

7　c を実数とし，曲線 $y=x^2+c$ ……①と曲線 $y=\log x$ ……②の共通接線を考える。

(1)　共通接線の本数を，実数 c の値によって答えよ。

(2)　共通接線が 1 本であるとき，その接線と①，②それぞれとの接点を求めよ。

(3)　共通接線が 1 本であるとき，①，②と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

[2015]

8　関数 $f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ。

(2)　$0\leqq x<2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3)　$x\geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x\geqq f(x)$ が成り立つことを示せ。　[2014]

9　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とし，また実数 a，b について $g(x)=e^{-ax+b}$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ においてつねに $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つために a，b が満たすべき条件を求めよ。

(2)　$y=g(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように a，b を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする。同様に $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように a，b を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする。このとき，$y=g_1(x)$ と $y=g_2(x)$ の交点を求めよ。

(3)　(2)で定めた $y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$ と $y=f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2009]

10　e を自然対数の底とし，$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log_e|x|+\frac{3}{4}$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ の 2 接線で，互いに垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　直線 l は曲線 $y=f(x)$ の接線で，原点を通りかつ傾きが正とする。l の方程式は $y=x$ であることを示せ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2007]

11　$a\neq 0$，$b\neq 0$ とする。$f(x)=a\cos^2 x+b\cos x+c$ について，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているとする。

(1)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸と接する点の x 座標をすべて求めよ。

(2)　さらに $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=0$ が成り立っているとき，$f(x)=0$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ を満たす x の値をすべて求めよ。　[2006]

12　3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　b, c を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)-g(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。　[2004]

13　実数 t に対して，u の 3 次方程式 $u^3-3u+2t=0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1)　媒介変数 t を用いて，$x=f(t)$，$y=-2t$（t は実数）と表される曲線を図示せよ。

(2)　関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め，$f(t)$ のグラフをかけ。　[2003]

14　a は定数とし，n は 2 以上の整数とする。関数 $f(x)=ax^n\log x-ax$ $(x>0)$ の最小値が -1 のとき，定積分 $\int_1^e f(x)\,dx$ の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

[2003]

15　a, b を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，a, b の値を求めよ。　[2001]

16　a, b を実数, e を自然対数の底とする。すべての実数 x に対して $e^x \geqq ax+b$ が成立するとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a, b の満たすべき条件を求めよ。

(2)　次の定積分 $\int_0^1 (e^x - ax - b)\,dx$ の最小値と，そのときの a, b の値を求めよ。

[2001]

■ 積分法

1　関数 $f(x) = \left|\cos x - \sqrt{5}\sin x - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right|$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ。

(3)　$S(t) = \displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ とおく。このとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2023]

2　正の整数 m, n に対して，$A(m,\ n) = (m+1)n^{m+1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx$ とおく。

(1)　$e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$ を証明せよ。

(2)　各 m に対して，$b_m = \displaystyle\lim_{n\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ。

(3)　各 n に対して，$c_n = \displaystyle\lim_{m\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ。　[2022]

3　n を正の整数とする。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n\theta\,d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2}\theta\,d\theta$ を n の式で表せ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7\theta\,d\theta$ を求めよ。　[2019]

4　(1)　次の定積分を求めよ。　$f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t-x}\sin(t+x)\,dt$

(2)　(1)で求めた x の関数 $f(x)$ に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ。　[2018]

5　0 以上の整数 n に対して，整式 $T_n(x)$ を

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　0 以上の任意の整数 n に対して，$\cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)$ となることを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2015]

6　n，m を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を使って表せ。

(2)　次の式　$I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ。

(3)　次の式　$\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0!=1$ とする。　[2014]

7　以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で，ある $a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ を満たしているものとする。このとき

$$f(b)-f(a)=\int_a^b\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2)　直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が，時刻 0 で発進後，距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ。　[2012]

8　$f(x)=x\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$，$g(x)=\log(1+x^2)$（$x$ は実数）とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1)　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2)　$x>0$ のとき $f(x)>g(x)$ であることを証明せよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right)-2\log n\right\}$ の値を求めよ。　[2011]

9　$a,\ b$ は実数とする。関数 $f(x)$ は，$f(x)=a\sin x+b\cos x+\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$ を満たし，かつ $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における最大値は 2π である。このとき，$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$ を最小にする a, b の値と，その最小値を求めよ。　[2010]

10　次の問いに答えよ。

(1)　置換 $x=\tan^3\theta$ により，定積分 $\int_1^{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ を求めよ。

(2)　$t>1$ に対して，$g(t)=\int_1^t \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$ と定める。$t\to\infty$ のとき $g(t)-at^b$ が収束するような正の実数 a, b を求めよ。　[2009]

11　x の関数 $f(x)=\int_{x-2}^{x+2} |y(y-5)|dy$ の $2\leqq x$ における最小値を求めよ。　[2007]

12　関数 $f(x)=3\cos 2x+7\cos x$ について，$\int_0^{\pi} |f(x)|dx$ を求めよ。　[2005]

13　n を 2 以上の整数とし，$I(x)=\int_0^x \sin t\sin nt\,dt\ (x\geqq 0)$ と定める。

(1)　$n=2$ のとき，$I(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$I(x)$ の最大値が $\frac{n}{n^2-1}$ であるならば, n は偶数であることを証明せよ。　[2002]

14　$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}\left(0<x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$，$f_n(0)=n$ で与えられる関数の列 $\{f_n(x)\}$ と $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$ からなる数列 $\{I_n\}$ とがある。

(1)　$f_n(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ。

(2)　$I_{n+1}-I_{n-1}$ を n の式で表せ。

(3)　$S_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{2k-1}$ とするとき，I_n を S_m を用いて表せ。　[1999]

■ 積分の応用

1　2 曲線 $C_1 : y = e^{ax}$，$C_2 : y = a\log x + b$ は，x 座標が t $(0 < t < 1)$ の点で接していて，$a \neq 0$ であるとする。ただし，2 曲線が点 P で接するとは，P を共有し，P における接線が一致することである。

(1)　a および b を t の式で表せ。

(2)　曲線 C_1 と x 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする。極限値 $\lim_{t \to 1-0} S_1(t)$ を求めよ。

(3)　曲線 C_2 と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする。極限値 $\lim_{t \to 1-0} S_2(t)$ を求めよ。　[2021]

2　t を実数とし，不等式

$$(x^2 - 2x + y^2)(x^2 - 3x + y^2) \leqq 0,\ t \leqq x \leqq t + 1$$

の表す xy 平面上の領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ。　[2020]

3　2 点 O(0, 0)，A(0, 2) を直径とする円周から O を除いた部分を点 Q が動く。点 A を通り x 軸に平行な直線と直線 OQ の交点を R とする。点 Q を通り x 軸と平行な直線と，点 R を通り y 軸と平行な直線との交点を P とする。点 P の軌跡を C とする。

(1)　C の方程式を求めよ。

(2)　正の実数 a に対して，C と x 軸と 2 直線 $x = a$，$x = -a$ によって囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。このとき，$\lim_{a \to \infty} V(a)$ を求めよ。　[2016]

4　a は 0 でない実数とする。直線 $y = ax$ と曲線 $y = x\log(x+1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2013]

5　関数 $y=\log|x|$ のグラフ G 上に動点 A, B があり，それぞれの x 座標を a, b とする。A における接線と B における接線が直交し，$a>0$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　ab を求めよ。

(2)　線分 AB の中点の存在範囲を求めよ。

(3)　直線 AB が点 $(1,\ 0)$ を通り，$a\neq 1$ を満たすとき，直線 AB と G で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2008]

6　媒介変数表示 $x=\cos\theta$，$y=\cos^2\theta\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}$ $\left(\text{ただし，}0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が表す曲線を C とする。

(1)　y を最大にする θ の値を α とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(2)　曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2007]

7　関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\leqq 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　a, b の値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

8　以下において $\log x$ は自然対数を表す。

(1)　$a>\dfrac{1}{e}$ のとき，$x>0$ に対し $x^a>\log x$ であることを示せ。

(2)　$a>\dfrac{1}{e}$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^a\log x=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$0<t<\dfrac{1}{e}$ として，曲線 $y=x\log x$ $(t\leqq x\leqq 1)$ および x 軸と直線 $x=t$ で囲まれた部分を，y 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を $V(t)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{t\to+0}V(t)$ を求めよ。　[2005]

9　xy 平面上の動点 A は原点 O$(0,\ 0)$ を出発し，x 軸上を点$(2,\ 0)$ まで動くとする。また動点 B は点$(0,\ 1)$ を出発し，$\mathrm{AB}=\mathrm{OB}=1$ なる条件を満たしながら第 1 象限を点$(1,\ 0)$ まで動くとする。点 P は線分 AB 上の点で $2\mathrm{BP}=\mathrm{OA}$ を満たす。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，点 P の座標を θ で表せ。ただし点 A が点 O と一致するときを除く。

(2)　点 P の軌跡と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2004]

10　座標空間内の 6 点 A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ 0,\ 1)$，C$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$，D$(0,\ 0,\ 0)$，E$(1,\ 0,\ 0)$，F$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$がある。動点 P は A を出発し，B, C, A の順に△ABC の周を一定の速さで一周する。P と同時に動点 Q は E を出発し，F, D, E の順に△DEF の周を P と同じ速さで一周する。線分 PQ が動いて作られる図形と△ABC, △DEF によって囲まれる立体を K とする。

(1)　$\mathrm{AP}=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ のとき，点 Q の座標を t で表せ。

(2)　(1)の P, Q に対して，線分 PQ と平面 $z=a\ (0\leqq a\leqq 1)$ との交点 R(t) の座標を求めよ。

(3)　平面 $z=a\ (0\leqq a\leqq 1)$ による K の切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　K の体積 V を求めよ。　[2000]

11　長さ 1 の棒 PQ が座標平面上にある。P は A$(1,\ 0)$ から出発し，x 軸上を原点 O まで動き，Q は O を出発し，B$(0,\ 1)$ まで y 軸上を動く。この棒の上に動点 R があり，つねに $\mathrm{PR}=\mathrm{AP}$ であるとする。

(1)　$\angle\mathrm{OQP}=\theta$ としたとき，R の座標を θ で表せ。

(2)　R が動いてできる曲線と x 軸, y 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ。

[2000]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で 3 つの条件 $\mathrm{PQ}=2$，$p<q$，$p+q=\sqrt{t}$ を満たすものを考える。△OPQ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S=0$ とする。

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

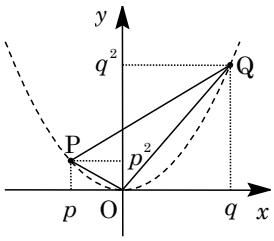
(2) S を t を用いて表せ。

(3) $S=1$ となるような t の個数を求めよ。 [2017]

解答例

(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ $(p<q)$ に対して，$\mathrm{PQ}=2$ より，

$$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=4,\ (q-p)^2\{1+(q+p)^2\}=4$$



ここで，$p+q=\sqrt{t}$ $(t\geqq 0)$ ……①より，

$$(q-p)^2(1+t)=4,\ q-p=\frac{2}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{t}+\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}\right)=\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ ……③

$$p=\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right)=\frac{\sqrt{t}}{2}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(2) △OPQ の面積を S とすると，③④より，

$$S=\frac{1}{2}\left|pq^2-p^2q\right|=\frac{1}{2}\left|pq(q-p)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{1+t}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\left|\frac{t^2+t-4}{4(1+t)}\right|=\frac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}$$

(3) 条件より $S=1$ なので，$\dfrac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}=1$ となり，

$$\left|t^2+t-4\right|=4(1+t)\sqrt{1+t},\ (t^2+t-4)^2=16(1+t)^3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を展開してまとめると，$t^4-14t^3-55t^2-56t=0$ となり，

$$t=0\ \cdots\cdots\cdots⑥,\ t^3-14t^2-55t-56=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，$f(t)=t^3-14t^2-55t-56$ とおくと，

$$f'(t)=3t^2-28t-55=(t-11)(3t+5)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，

t	0	$\cdots$	11	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-56	↘		↗

$t>0$ において⑦の解はただ 1 つ存在する。

以上より，⑤の解すなわち $S=1$ となる t の個数は，⑥を合わせて 2 である。

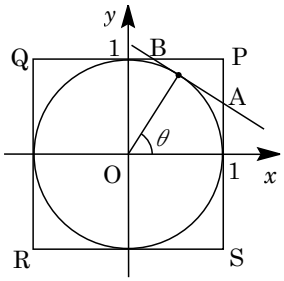
コメント

放物線を題材にした図形と式についての問題です。(3)では，同値変形とはいうものの，両辺を 2 乗して 4 次方程式⑤を導く段階で少し躊躇しましたが……。

問　題

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。 [2014]

解答例



原点を中心とする半径 1 の円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

直線 $x=1$ と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$ とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ となることを用いて，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，△APB の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $1<t\leqq\sqrt{2}$ となり，$(*)$から，

$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

よって，S が最大となるのは，$t=\sqrt{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

コメント

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

問　題

a, b を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

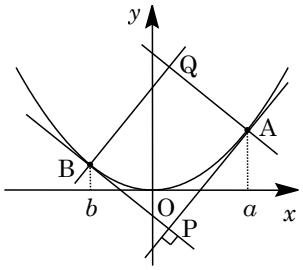
(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

解答例



(1)　$y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。

ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ b=-\frac{4}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$l_{\mathrm{A}}:y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots②$

$$l_{\mathrm{B}}:y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\right)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\right)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\right)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

なお，等号は，$a=\frac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より，S は $a=2$ のとき最小値 $\frac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

コメント

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが，長方形の性質を利用して，計算量を減らしています。

問　題

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1)　直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3)　連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$ の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$y=x^2$ に対して，$y'=2x$ となり，点 $(a,\ a^2)$ における接線 l_a の方程式は，

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5\cdots\cdots②$ の表す領域に含まれることより，①を②に代入して，

$$2ax-a^2>-x^2+2x-5,\ \ x^2+2(a-1)x-a^2+5>0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③が任意の x に対して成立することより，

$$D/4=(a-1)^2-(-a^2+5)=2(a^2-a-2)<0$$

すると，$(a-2)(a+1)<0$ より，$-1<a<2$ である。

(2)　直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ は，①より，$a^2-2xa+y=0$ が $-1<a<2$ に実数解をもたない条件として求めることができる。

ここで，$f(a)=a^2-2xa+y=(a-x)^2-x^2+y$ とおくと，

(i)　$x\leqq -1$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\geqq 0$ より，$y\geqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より，$y\leqq 4x-4$

(ii)　$-1<x<2$ のとき

(a)　$f(x)=-x^2+y>0$ より，$y>x^2$

(b)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$，$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より，

$y\leqq -2x-1$，$y\leqq 4x-4$

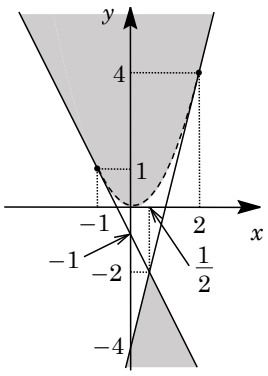
(iii)　$x\geqq 2$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$ より，$y\leqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\geqq 0$ より，$y\geqq 4x-4$

(i)～(iii)より，領域 D は右図の網点部となる。

ただし，破線の境界線のみ領域に含まない。



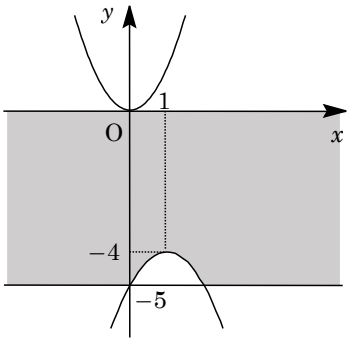
(3)　不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$ を変形すると，

$x^2>-x^2+2x-5$ より，

$$-x^2+2x-5\leqq y\leqq x^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

また，$y(y+5)\leqq 0$ より，

$$-5\leqq y\leqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$



よって，連立不等式④⑤の表す領域 E は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

さて，直線 $y=-2x-1$ と放物線 $y=-x^2+2x-5$ を連立すると，

$$-2x-1=-x^2+2x-5,\ x^2-4x+4=0$$

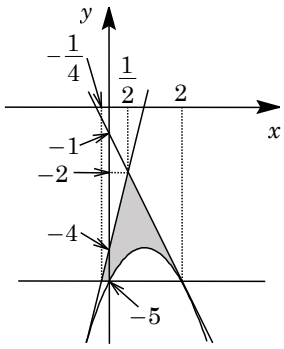
重解 $x=2$ をもつことより，$x=2$ で接する。

また，直線 $y=4x-4$ と放物線 $y=-x^2+2x-5$ を連立すると，

$$4x-4=-x^2+2x-5,\ x^2+2x+1=0$$

重解 $x=-1$ をもつことより，$x=-1$ で接する。

これより，領域 D と E の共通部分を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



そこで，この共通部分の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{4}\right)(-2+5)-\int_0^2(-x^2+2x-5+5)\,dx$$

$$=\frac{27}{8}-\int_0^2 -x(x-2)\,dx=\frac{27}{8}-\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{49}{24}$$

コメント

計算量の多い問題で，時間はかなり必要です。(2)はオーソドックスに解きましたが，図形的に解くのが出題者の意図かもしれません。

問　題

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O(0, 0)，A(1, 0) をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

(i)　$p>0$，$q>0$　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

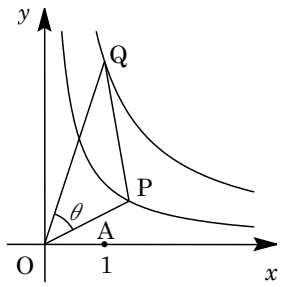
(iii)　△OPQ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

[2010]

解答例

$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，$\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ に対して，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$ となる。



条件より，$\alpha<\beta$ なので，$\tan\alpha<\tan\beta$

$$\frac{1}{p^2}<\frac{a}{q^2},\quad ap^2-q^2>0\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，△OPQ の面積を S とすると，①より，

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=\frac{1}{2pq}(ap^2-q^2)$$

条件より，$\dfrac{1}{2pq}(ap^2-q^2)=3$，$ap^2-q^2=6pq\ \cdots\cdots\cdots②$

ここで，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とおくと，$\theta=\beta-\alpha$ から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}$$

②を代入すると，$\tan\theta=\dfrac{6pq}{p^2q^2+a}=\dfrac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$ すなわち $pq=\sqrt{a}$ のときに成立する。

よって，$\tan\theta$ の最大値は $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$ となり，$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$ から，$a=16$ である。

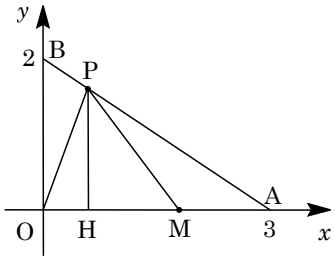
コメント

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて，微分法の利用という手もありますが，おすすめは前者です。なお，等号の成立する p，q の値が存在することは明らかなので，記述を省いています。

問　題

座標平面上に点A(3, 0)，B(0, 2)をとる。線分AB上に点Pをとり，Pからx軸に下ろした垂線をPH, AとHの中点をMとする。ただし点Hはx軸上の点とし，またPはAと異なるものとする。Oを原点とし△OPMをOを中心に座標平面内で1回転するとき，通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点Pの座標を求めよ。 [2009]

解答例



線分AB上の点Pを, $0 \leqq t < 1$として,

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} = (3t,\ 2(1-t))$$

すると，$P(3t,\ 2(1-t))$，$H(3t,\ 0)$，$M\left(\dfrac{3t+3}{2},\ 0\right)$

となり，これより，

$$OP^2 = (3t)^2 + 4(1-t)^2 = 13t^2 - 8t + 4$$

$$OM^2 = \frac{9}{4}(t+1)^2$$

さて，△OPMをOを中心に回転したときにできる円の面積をSとすると，

(i)　$13t^2 - 8t + 4 \geqq \dfrac{9}{4}(t+1)^2$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{7}{43}\right)$のとき

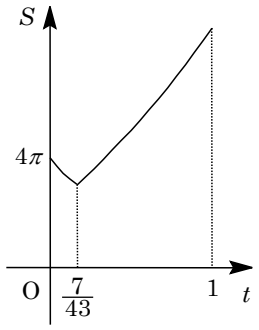
このとき，$OP^2 \geqq OM^2$より，

$$S = \pi OP^2 = \pi(13t^2 - 8t + 4) = \pi\left\{13\left(t - \frac{4}{13}\right)^2 + \frac{36}{13}\right\}$$

(ii)　$13t^2 - 8t + 4 \leqq \dfrac{9}{4}(t+1)^2$　$\left(\dfrac{7}{43} \leqq t < 1\right)$のとき

このとき，$OP^2 \leqq OM^2$より，

$$S = \pi OM^2 = \frac{9}{4}\pi(t+1)^2$$



(i)(ii)より, Sの値の変化は右図のようになる。

よって，$t = \dfrac{7}{43}$のときSは最小となり，このときPの座標は，

$\left(\dfrac{21}{43},\ \dfrac{72}{43}\right)$である。

コメント

円の半径はOPまたはOMとなりますが，この大小関係に注目して場合分けをするところがポイントです。

問　題

a, t を実数とするとき，座標平面において，$x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ で定義される図形 C を考える。

(1)　すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ。ただし，点は円とみなさないものとする。

(2)　$a=4$ とする。t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

(3)　$a=6$ とする。t が $t>0$ であって，かつ C が円であるような範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。　[2006]

解答例

(1)　$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ より，

$$(x-t)^2+(y-t)^2=2t^2-at+4 \cdots\cdots\cdots ①$$

①が円を表す条件 $2t^2-at+4>0$ が，すべての t に対して成立するためには，

$$D=a^2-32<0,\ -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$$

(2)　$a=4$ のとき，$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-4)=0 \cdots\cdots\cdots ②$

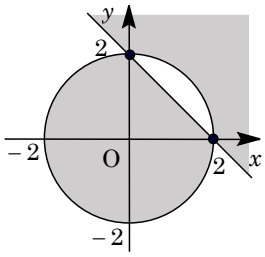
t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過する領域は，②を t の方程式としてみたとき，$t>0$ の解をもつ条件として表される。

まず，$2x+2y-4=0 \cdots\cdots ③$ のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0 \cdots\cdots ④$ の場合だけである。ここで，③④を連立することにより $(x,\ y)=(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ となり，C はこの点を通過する。

次に，$2x+2y-4\neq 0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}$ となり，

$$\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}>0,\ (x^2+y^2-4)(x+y-2)>0$$

よって，C が通過する領域は右図の網点部となる。ただし，点 $(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$ 以外の境界は含まない。



(3)　$a=6$ のとき，$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-6)=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

⑤が円を表す条件は，(1)より $2t^2-6t+4>0$ すなわち $(t-1)(t-2)>0$ であり，$t>0$ と合わせて，$0<t<1$，$2<t \cdots\cdots (*)$ となる。

まず，$2x+2y-6=0 \cdots\cdots ⑥$ のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0 \cdots\cdots ⑦$ の場合だけである。ここで，⑥より $y=-x+3$ となり，⑦に代入すると，

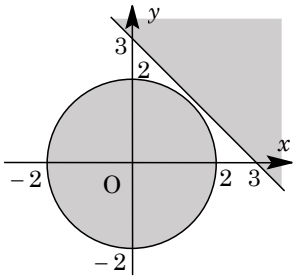
$$x^2+(-x+3)^2-4=0,\ 2x^2-6x+5=0$$

しかし，$D/4=-1$ より実数解をもたず，不適である。

次に，$2x+2y-6\neq 0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}$ となり，

(＊)より，

$$0<\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}<1\cdots\cdots⑧,\ \ 2<\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}\cdots\cdots⑨$$



⑧の左側の不等式は，

$$(x^2+y^2-4)(x+y-3)>0\cdots\cdots\cdots⑩$$

不等式⑩を図示すると，右上図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

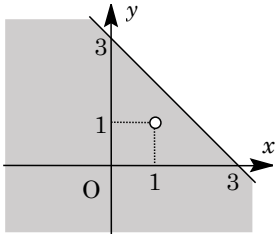
⑧の右側の不等式は，$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)<(2x+2y-6)^2$

$$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-2x-2y+6)<0$$

$$(x+y-3)\{(x-1)^2+(y-1)^2\}<0\cdots\cdots\cdots⑪$$

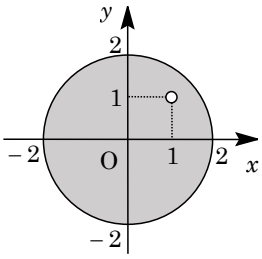
すると，$(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 0$ から，不等式⑪は，

$$(x,\ y)\neq(1,\ 1)\ \text{かつ}\ \ x+y-3<0$$



よって，図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

まとめると，不等式⑧は，不等式⑩と⑪を連立したものであるので，その共通部分を領域として図示すると，右下図の網点部となる。ただし，境界および点(1，1)は含まない。



さらに，⑨を変形すると，

$$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)>2(2x+2y-6)^2$$

$$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-4x-4y+12)>0$$

$$(x+y-3)\{(x-2)^2+(y-2)^2\}>0\cdots\cdots\cdots⑫$$

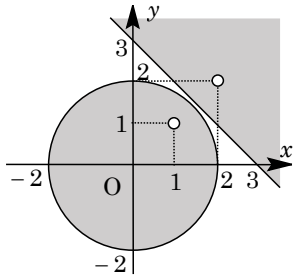
すると，$(x-2)^2+(y-2)^2\geqq 0$ から，不等式⑫は，

$$(x,\ y)\neq(2,\ 2)\ \text{かつ}\ \ x+y-3>0$$

したがって，不等式⑨は，直線 $x+y-3=0$ の上側から，点(2，2)を除いた領域を表す。

以上より，C が通過する領域は不等式⑧または⑨で表されるので，図示すると右図の網点部となる。

ただし，境界線および 2 点(1，1)，(2，2)は含まない。



コメント

記述量が多い問題です。ステップを 1 つずつ踏んで図示していくだけですが，かなりの計算力と忍耐力が要求されます。

問　題

(1)　次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1) \geqq \log_{10}(-2x^2+2x+1)$$

(2)　x, y が(1)の不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1) \geqq \log_{10}(-2x^2+2x+1)$ に対して，

$$-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1>0 \cdots\cdots①,\quad -2x^2+2x+1>0 \cdots\cdots②$$

①②のもとで，$-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1 \geqq -2x^2+2x+1 \cdots\cdots\cdots③$

②③より①は成り立ち，②より $2x^2-2x-1<0$ から，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

③より，$y^2+(2x-1)y-(x^4-2x^3-x^2+2x) \leqq 0$ となり，

$$y^2+(2x-1)y-(x^2-1)(x^2-2x) \leqq 0$$

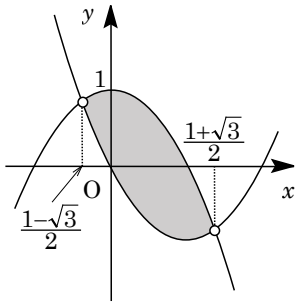
$$\{y+(x^2-1)\}\{y-(x^2-2x)\} \leqq 0 \cdots\cdots\cdots④$$

また，④で表される領域の境界線の方程式は，

$$y=-x^2+1 \cdots\cdots⑤,\quad y=x^2-2x \cdots\cdots⑥$$

⑤⑥の共有点は，$-x^2+1=x^2-2x$ より，

$$2x^2-2x-1=0,\quad x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$



さて，点 $(0,\ -1)$ は④を満たさないので，②かつ④の満たす領域は右図の網点部となる。なお，白丸以外の境界線は領域に含む。

(2)　$x+y=k \cdots\cdots⑦$ とおき，直線⑦と(1)の領域が共有点をもつ k の範囲を求める。

まず，⑤と⑦が接するのは，$x+(-x^2+1)=k$，$x^2-x+k-1=0$

$$D=1-4(k-1)=0,\quad k=\frac{5}{4}$$

このとき，$x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ を満たす。

次に，⑥と⑦が接するのは，$x+(x^2-2x)=k$，$x^2-x-k=0$

$$D=1+4k=0,\quad k=-\frac{1}{4}$$

このとき，$x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ を満たす。

以上より，$x+y$ の最大値は $\dfrac{5}{4}$，最小値は $-\dfrac{1}{4}$ である。

コメント

④の因数分解にやや時間を取られることを除くと，見かけよりはるかに基本的です。

問　題

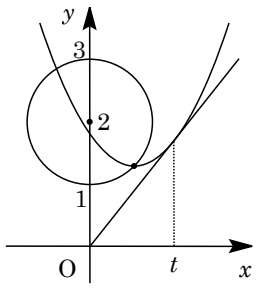
C は，2 次関数 $y=x^2$ のグラフを平行移動した放物線で，頂点が円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上にある。原点から C に引いた接線で傾きが正のものを l とおく。このとき，C と l の接点の x 座標が最大および最小になるときの C の頂点の座標をそれぞれ求めよ。

[2001]

解答例

$0 \leqq \theta < 2\pi$ として，円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上の点を $(\cos\theta,\ \sin\theta+2)$ とする。

この点が，放物線 $y=x^2$ を平行移動した放物線の頂点とすると，その方程式は，



$$y=(x-\cos\theta)^2+\sin\theta+2$$

ここで，接点を $(t,\ (t-\cos\theta)^2+\sin\theta+2)$ $(t>0)$ とおく。

すると，$y'=2(x-\cos\theta)$ なので，条件より，

$$\frac{(t-\cos\theta)^2+\sin\theta+2}{t}=2(t-\cos\theta)$$

$$(t-\cos\theta)^2+\sin\theta+2=2t(t-\cos\theta)$$

まとめて，$t^2=\cos^2\theta+\sin\theta+2=-\sin^2\theta+\sin\theta+3=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

$t>0$ より，$t=\sqrt{-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}}$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，t が最大となるのは $\sin\theta=\frac{1}{2}$ のとき，すなわち $\theta=\frac{\pi}{6}$ または $\theta=\frac{5\pi}{6}$ のときである。このとき頂点の座標は，$\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}+2\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ または $\left(\cos\frac{5\pi}{6},\ \sin\frac{5\pi}{6}+2\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ となる。

また，t が最小となるのは $\sin\theta=-1$ のとき，すなわち $\theta=\frac{3\pi}{2}$ のときである。このとき頂点の座標は，$\left(\cos\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2}+2\right)=(0,\ 1)$ となる。

コメント

円周上の点をパラメータ表示して，放物線の方程式を作りました。なお，最大となる場合が 2 つありましたが，問題文を読んだときには見抜けませんでした。

問　題

四面体 ABCD において，$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=AC^2+BD^2$，$\angle ADB=90^\circ$ が成り立っている。三角形 ABC の重心を G とする。

(1)　$\angle BDC$ を求めよ。

(2)　$\dfrac{\sqrt{AB^2+CD^2}}{DG}$ の値を求めよ。　[2020]

解答例

(1)　四面体 ABCD において，$\angle ADB=90^\circ$ より，

$$AB^2=AD^2+BD^2 \cdots\cdots\cdots(*)$$

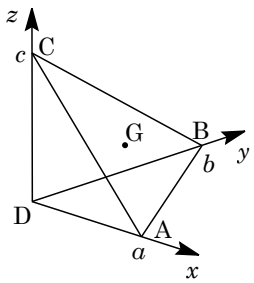
条件より，$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2=AC^2+BD^2$ なので，(＊)から，

$$AD^2+BD^2+CD^2=BC^2+AD^2=AC^2+BD^2$$

すると，$BD^2+CD^2=BC^2$，$AD^2+CD^2=AC^2$ となり，

$$\angle BDC=90^\circ,\ \angle ADC=90^\circ$$

(2)　$DA=a$，$DB=b$，$DC=c$ とすると，(1)から，D(0, 0, 0) として，A(a, 0, 0)，B(0, b, 0)，C(0, 0, c) とおくことができる。すると，△ABC の重心は $G\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{b}{3},\ \dfrac{c}{3}\right)$ となり，



$$\sqrt{AB^2+CD^2}=\sqrt{(a^2+b^2)+c^2}$$

$$DG=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

よって，$\dfrac{\sqrt{AB^2+CD^2}}{DG}=3$ である。

コメント

図形の計量の問題です。ポイントは三平方の定理(＊)だけで，これによって，座標系の設定という方針が，自然に湧き出てくると思われます。

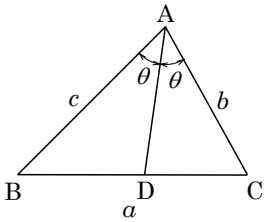
問　題

三角形 ABC は $\mathrm{AB}+\mathrm{AC}=2\mathrm{BC}$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$\mathrm{AD}=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle\mathrm{BAC}$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。　[2019]

解答例



(1)　△ABC に対して，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とおく。また，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D として，

$$b+c=2a\cdots\cdots\cdots①,\quad \mathrm{AD}=15\cdots\cdots\cdots②$$

さて，△ABC は内接円の半径が 4 より，その面積を S とおくと，①より，

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot 4=2\cdot 3a=6a\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\theta=\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$ から，①②を用いて，

$$S=\frac{1}{2}b\cdot\mathrm{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}c\cdot\mathrm{AD}\sin\theta=\frac{1}{2}(b+c)\cdot 15\sin\theta=15a\sin\theta\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$15a\sin\theta=6a$ となり，$\sin\theta=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$

すると，$A=2\theta$ から，$\cos A=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\dfrac{4}{25}=\dfrac{17}{25}\cdots\cdots\cdots⑤$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{17}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{(25+17)(25-17)}}{25}=\frac{4\sqrt{21}}{25}\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2)　⑥より，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{2\sqrt{21}}{25}bc$ となり，③に代入すると，

$$\frac{2\sqrt{21}}{25}bc=6a,\quad bc=\frac{75}{\sqrt{21}}a=\frac{25\sqrt{21}}{7}a\cdots\cdots\cdots⑦$$

また，△ABC に余弦定理を適用して，①⑤を利用すると，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cdot\frac{17}{25}=4a^2-\frac{84}{25}bc\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より，$a^2=4a^2-\dfrac{84}{25}\cdot\dfrac{25\sqrt{21}}{7}a$ となり，$3a^2=12\sqrt{21}a$ から，

$$\mathrm{BC}=a=4\sqrt{21}$$

コメント

三角比の応用問題です。試行錯誤が少し必要ですが，(1)の結論と(2)のプロセスとの繋がりを見つけるのがポイントになっています。

問　題

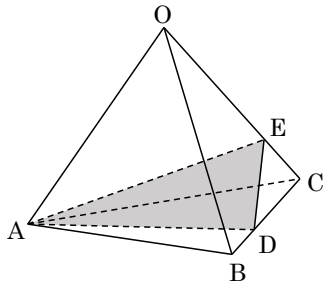
1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を$1:2$に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$\mathrm{CE}=t$ とする。

(1) AD の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ADE}$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。　[2013]

解答例



(1) $\triangle\mathrm{ABD}$ に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AD}^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\cos60^\circ=7$$

よって，$\mathrm{AD}=\sqrt{7}$ となる。

(2) $\triangle\mathrm{ACE}$ に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AE}^2=3^2+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\cos60^\circ=t^2-3t+9$$

また，$\triangle\mathrm{CDE}$ に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{DE}^2=2^2+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\cos60^\circ=t^2-2t+4$$

さらに，$\triangle\mathrm{ADE}$ に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{DAE}=\frac{7+(t^2-3t+9)-(t^2-2t+4)}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}=\frac{12-t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$$

(3) (2)より，$\sin\angle\mathrm{DAE}=\sqrt{1-\dfrac{(12-t)^2}{28(t^2-3t+9)}}=\dfrac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$

すると，$\triangle\mathrm{ADE}$ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9t^2-20t+36}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9\left(t-\frac{10}{9}\right)^2+\frac{224}{9}}$$

よって，S は$t=\dfrac{10}{9}$ のとき，最小値$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\dfrac{224}{9}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$ をとる。

コメント

三角比の空間図形への適用問題です。基本的な定理の確認となっています。

問　題

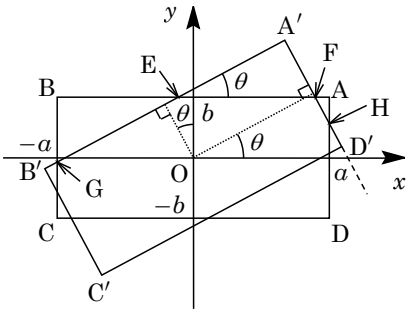
横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また，回転角 θ は 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。 [2012]

解答例

(i)　$a \neq b$ のとき

まず，$a > b$ としても一般性を失わない。

右図のように，長方形の中心を原点とし，長方形 ABCD の各辺が座標軸に平行になるようにとる。そして，原点中心に θ だけ回転した長方形を A′B′C′D′ とする。



さて，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のときを考える。

そこで，直線 AB : $y = b$ と直線 A′B′ : $y = x\tan\theta + \dfrac{b}{\cos\theta}$ を連立して，

$$b = x\tan\theta + \frac{b}{\cos\theta},\quad x = \frac{b}{\tan\theta}\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta}$$

よって，直線 AB と直線 A′B′ の交点 E は，$\mathrm{E}\left(\dfrac{b(\cos\theta-1)}{\sin\theta},\ b\right)$ となり，

$$\mathrm{BE} = \frac{b(\cos\theta-1)}{\sin\theta} - (-a) = \frac{a\sin\theta + b\cos\theta - b}{\sin\theta}$$

$$\triangle\mathrm{BEG} = \frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BE}\tan\theta = \frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

次に，直線 AB : $y = b$ と直線 A′D′ : $y = -\dfrac{1}{\tan\theta}\left(x - \dfrac{a}{\cos\theta}\right)$ を連立して，

$$b = -\frac{1}{\tan\theta}\left(x - \frac{a}{\cos\theta}\right),\quad x = -b\tan\theta + \frac{a}{\cos\theta} = \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta}$$

よって，直線 AB と直線 A′D′ の交点 F は，$\mathrm{F}\left(\dfrac{a - b\sin\theta}{\cos\theta},\ b\right)$ となり，

$$\mathrm{AF} = a - \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta - a}{\cos\theta}$$

$$\triangle\mathrm{AFH} = \frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\tan\theta} = \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

したがって，長方形 ABCD と長方形 A′B′C′D′ の共通部分の面積 $S(\theta)$ は，

$$
\begin{aligned}
S(\theta) &= \square\mathrm{ABCD} - 2(\triangle\mathrm{BEG} + \triangle\mathrm{AFH}) \\
&= 4ab - 2\left\{ \frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta} + \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta} \right\} \\
&= 4ab - \frac{2(a^2 + b^2 - a^2\cos\theta - b^2\cos\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta - 2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= 4ab - \frac{2(1-\cos\theta)(a^2 + b^2 - 2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \cdots\cdots\cdots(*)
\end{aligned}
$$

なお，$\theta = 0$ のときは，$S(\theta) = 4ab$ である。

(ii)　$a = b$ のとき

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき, $(*)$において $a = b$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
S(\theta) &= 4a^2 - \frac{2(1-\cos\theta)(2a^2 - 2a^2\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} = 4a^2\left\{ 1 - \frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \right\} \\
&= \frac{4a^2(\sin\theta + \cos\theta - 1)}{\sin\theta\cos\theta}
\end{aligned}
$$

なお，$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のときは，$S(\theta) = 4a^2$ である。

コメント

最初の設定から始める必要があり，そこで時間を費やしてしまいます。上の解答例では座標系を設定しましたが，計算量はかなりハードなものがあります。なお，回転角 θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ですが，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ となるのは正方形のときのみです。

問　題

点 O を原点とする座標平面において，点 A と点 B が $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=5$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$ となるような実数 k は存在しないことを示せ。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点を H とする。$\overrightarrow{HB}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(3)　実数 t に対し，直線 OA 上の点 P を $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}$ となるようにとる。同様に直線 OB 上の点 Q を $\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}$ となるようにとる。点 P を通り直線 OA と直交する直線を l_1 とし，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を l_2 とする。l_1 と l_2 の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，t を用いて表せ。

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

[2023]

解答例

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=5$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$ のとき，$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$ と仮定すると，

$$k^2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=2,\ k\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=3$$

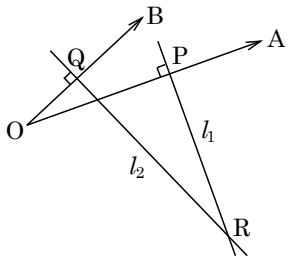
すると，$5k^2=2$ かつ $5k=3$ となり，両式を満たす実数 k は存在しない。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点 H に対して，$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}$ とおくと $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}-s\overrightarrow{OA}$ となり，$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ から，

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ 3-5s=0$$

すると，$s=\dfrac{3}{5}$ から，$\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}$ である。

(3)　$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}$ のとき，点 P を通り直線 OA と直交する直線を l_1，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を l_2 とし，l_1 と l_2 の交点を R とする。



ここで，$\overrightarrow{OR}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$ とおくと，

$$\overrightarrow{PR}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}=(p-t)\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{QR}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}-(1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$=p\overrightarrow{OA}+(q+t-1)\overrightarrow{OB}$$

すると，$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ から $5(p-t)+3q=0$ となり，$5p+3q=5t$ ……①

また，$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ から $3p+2(q+t-1)=0$ となり，$3p+2q=-2t+2$ ……②

①②より，$p=16t-6$，$q=-25t+10$ となり，

$$\overrightarrow{OR}=(16t-6)\overrightarrow{OA}-(25t-10)\overrightarrow{OB}\ \cdots\cdots③$$

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心 C は, 線分 OA と線分 OB の垂直二等分線の交点なので, ③に $t=\frac{1}{2}$ を代入すると R = C となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(16\cdot\frac{1}{2}-6\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\left(25\cdot\frac{1}{2}-10\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

コメント

平面ベクトルの基本題です。(4)は(3)の結果がストレートに利用できます。なお, (3)は(2)の結果を利用してもよかったのですが……。